

1. OBJETIVOS

Los objetivos de este trabajo son, en un principio, la actualización de la red geodésica del departamento de Montevideo denominada MRGMVD 2004 (Marco de Referencia Geodésico de Montevideo 2004), verificando su estado de conservación y efectuando la reposición de los puntos destruidos o que se encontraran en mal estado, para luego, recalcular sus coordenadas mediante relevamiento GPS.

Posteriormente, determinar las cotas oficiales de los puntos de la red geodésica, partiendo de los puntos del sistema altimétrico Consejo Departamental de Montevideo CDM.

Esto nos permitirá, a partir de la selección de una función paramétrica a determinar, obtener cotas oficiales aproximadas, partiendo de coordenadas geodésicas referidas a un sistema de referencia dado.

2. MARCO TEÓRICO

Describiremos conceptos y definiciones que están involucradas en este trabajo, para mejor comprensión del mismo.

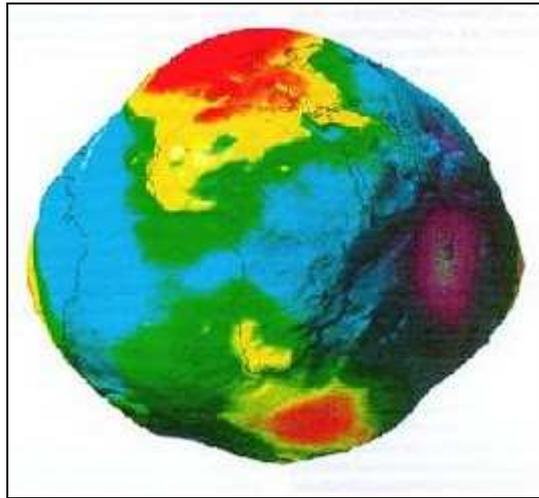
2.1 *Superficies geodésicas de referencia*

Las superficies de referencia desempeñan un rol fundamental en Geodesia, ya que resultan imprescindibles a la hora de compatibilizar las medidas realizadas con los modelos matemáticos adoptados.

Son dos las principales superficies sobre las que se refieren las altitudes de los puntos sobre la Tierra:

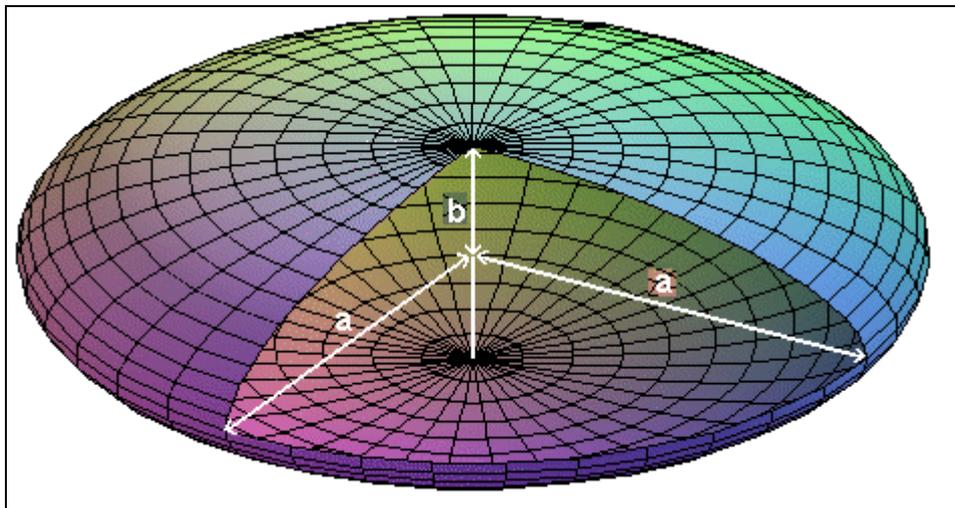
1- GEOIDE: Según la definición de Benavidez (2004) “*el geoide es la superficie matemática de la tierra, se define como una superficie equipotencial de la gravedad para un valor especial constante W_0* ”. Esta superficie incluye todos los puntos, en los cuales el potencial gravitacional o la cantidad de trabajo necesario para superar la aceleración de la gravedad es constante.

Por lo tanto, podríamos definir al geoide como la superficie equipotencial que se corresponde con el nivel medio de los océanos y se prolonga por debajo de los continentes. La desigualdad de la distribución de las masas continentales, así como la densidad variable de los materiales que componen nuestro planeta, hacen que el geoide no sea una superficie regular y que en cambio, presente protuberancias y depresiones, apartándose de la superficie regular media en desniveles que alcanzan hasta los ± 100 m.



Representación del Geoide.-

2- ELIPSOIDE: La superficie matemática que mejor se aproxima a la forma del geoide, es el "Elipsoide de revolución" o sea un elipsoide al que se lo hace girar sobre su eje menor y constituir un cuerpo con superficie. De esa manera, sobre la superficie del elipsoide, se pueden efectuar los cálculos angulares de posicionamiento y los cálculos de distancias



Elipsoide.-

Existen diferentes modelos de elipsoides utilizados en geodesia, denominados elipsoides de referencia. Las diferencias entre éstos vienen dadas por los valores asignados a sus parámetros más importantes:

- Semieje mayor (a): Longitud del semieje correspondiente al ecuador, desde el centro de masas de la Tierra hasta la superficie terrestre.
- Semieje menor (b): Longitud del semieje desde el centro de masas de la Tierra hasta uno de los polos. Alrededor de este eje se realiza la rotación de la elipse base.

Elipsoide	Semieje mayor a (m)	Semieje menor b (m)
Clarke	6378206.4	6356583.799
Internacional de Hayford	6378388	6356911.946
SRG80	6378137	6356752.314
WGS84	6378137	6356752.314

El origen de los sistemas de referencia globales es el geocentro. Los sistemas de referencia geodésicos tienen asociado un elipsoide de revolución centrado en el origen.

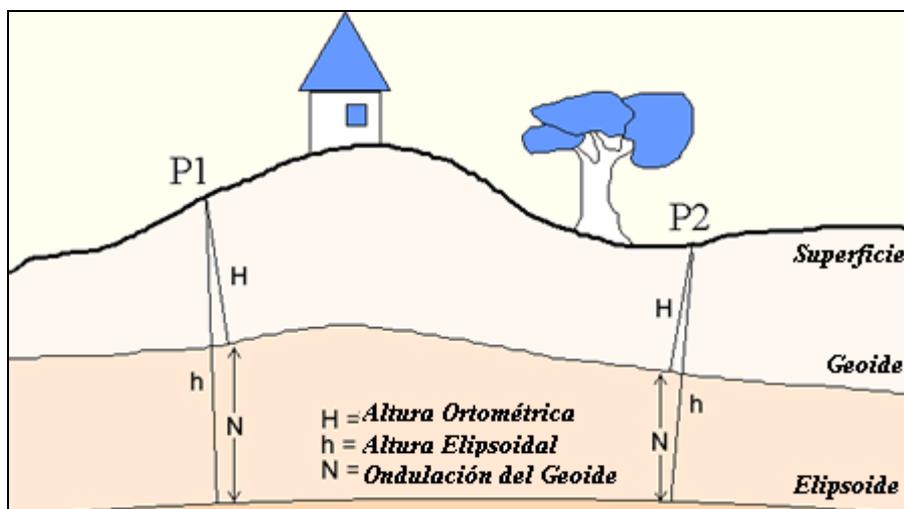
La fórmula general que representa el elipsoide de revolución geocéntrico es:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

donde a y b , son los semiejes mayor y menor respectivamente, de la elipse generatriz.

2.1.1 Altitudes de un punto sobre la Tierra

En relación con las superficies definidas anteriormente, pueden ser calculadas tres tipos de altitudes de un punto sobre la Tierra: Altura *Ortométrica* (H), altura *Elipsoidal* (h) y altura *Geoidal* o ondulación del geoida (N).



Esquema de alturas.-

- *Altura Ortométrica (H)*

La altura ortométrica se define como la distancia vertical entre la superficie física de la Tierra y la superficie del geoida. Esta distancia se mide a lo largo de la línea de plomada, la cual es la curva que es tangencial a la dirección de la gravedad en cualquier punto. La línea de plomada no es una línea recta, ya que tiene una leve curvatura y giro, debido a que la dirección de la gravedad varía dependiendo de las características de densidad local.

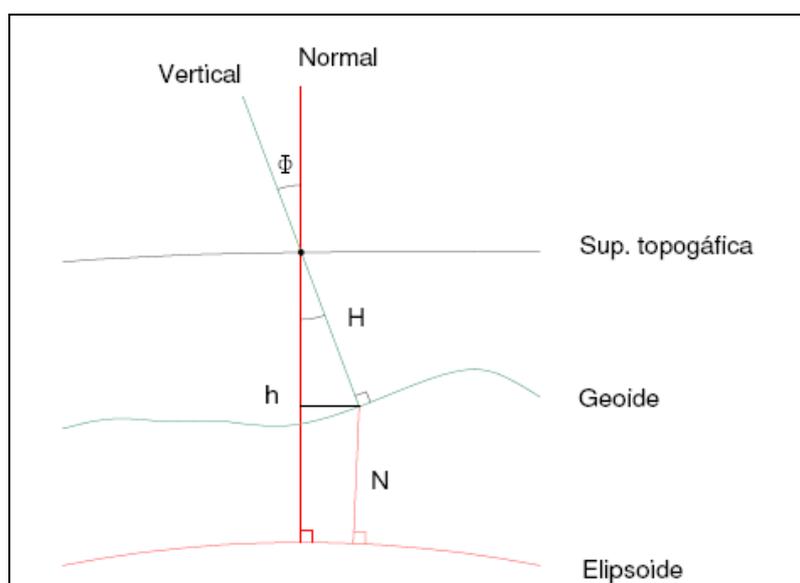
- *Altura Elipsoidal (h)*

La altura elipsoidal es la distancia entre en la superficie topográfica y el elipsoide medida a lo largo de la normal al elipsoide. Esta altura es de tipo matemático, debido a que no responde a ningún principio físico. La altura es positiva por encima del elipsoide y negativa por debajo de él.

- *Altura Geoidal (N)*

La altura geoidal o también conocida como anomalía geoidal (N), es la diferencia existente entre la superficie del geoide en un determinado lugar de la tierra y la altura en base a un determinado elipsoide de referencia, si ésta es positiva, significa que el geoide se encuentra situado en parte superior al del elipsoide, si es negativa entonces el geoide se encuentra en la parte inferior.

Considerando la no coincidencia entre la normal al elipsoide y la vertical del lugar, queda determinado un ángulo llamado desviación relativa de la vertical Φ , como lo muestra la figura a continuación.



Desviación relativa de la vertical.-

De lo anterior, se deduce la siguiente relación entre las alturas consideradas.

$$h = N + H \cdot \cos(\Phi)$$

Teniendo en cuenta que los valores de la desviación relativa de la vertical son de unos pocos segundos, el valor del coseno será muy próximo a uno.

Debido a esto, una simplificación de la siguiente expresión, que relaciona las alturas ortométricas y las alturas elipsoidales es:

$$h = N + H \Rightarrow N = h - H$$

La anomalía geoidal (N) se puede determinar mediante las siguientes metodologías: modelos geopotenciales, métodos astrogeodésicos, método Stokes-Helmert.

2.2 Modelos Geopotenciales

Los modelos geopotenciales permiten calcular los valores de la altura geoidal N que vinculan la altura elipsoidal h con la ortométrica H , y tienen asociado un conjunto de constantes: de atracción gravimétrica terrestre (GM), semieje mayor y aplastamiento del elipsoide terrestre, velocidad de rotación de la tierra y los coeficientes del desarrollo armónico. Este cálculo se realiza con un programa general que lee los coeficientes y calcula los valores relacionados con el potencial, entre ellos N .

Para el desarrollo de un modelo geopotencial de alto grado se utiliza tres tipos de información:

- Obtenida a partir del estudio de las perturbaciones de órbitas de satélites.
- Gravimétrica terrestre y aérea.
- Altimétricas de satélites sobre los océanos.

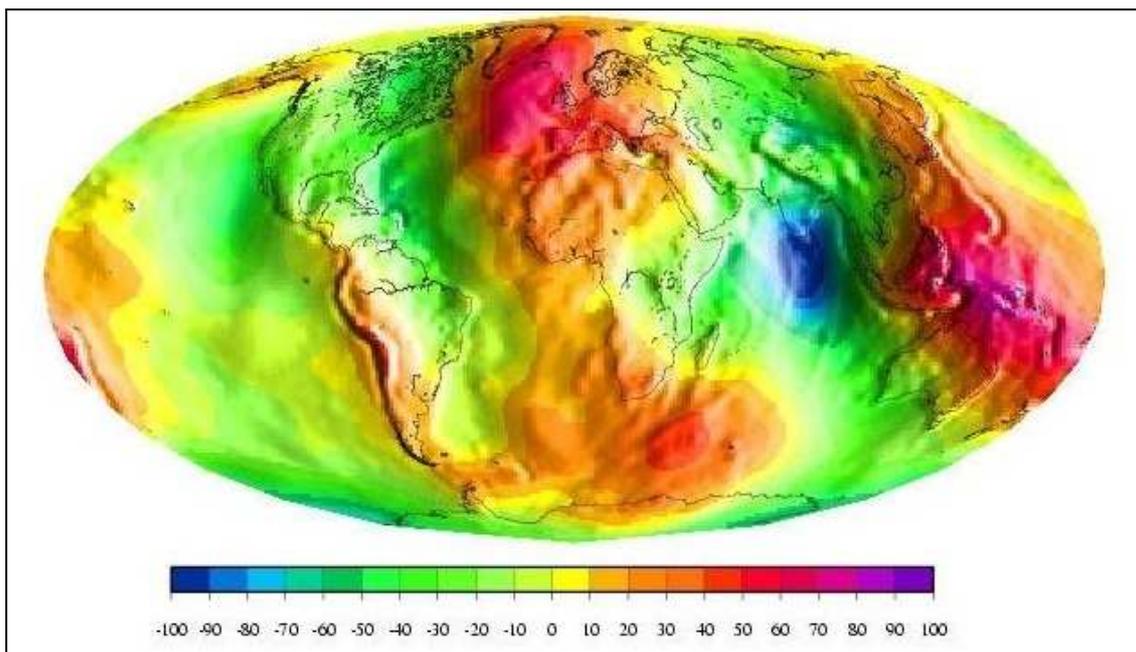
Combinando estos tres tipos de soluciones se obtiene una mejor solución que utilizando una sola de ellas. Esta solución depende del tratamiento de las altimetrías de los satélites, la disponibilidad de datos en tierra firme y la resolución de buenas computadoras.

2.2.1 Modelo Geoidal EGM2008

Para este trabajo, el modelo geoidal que se utilizará será el EGM2008.

Éste, es un modelo geoidal global, que ha sido publicado por la Agencia Nacional de Inteligencia Geoespacial (NGA), EGM Equipo de Desarrollo. Los cálculos del geoide local se han basado tradicionalmente en la filosofía Helmert de condensación: la topografía se condensa en una capa delgada sobre el geoide, mientras que el efecto directo de la anomalía de la gravedad tiende hacia abajo del geoide. Numéricamente, esto se hace mediante la sustitución de la anomalía de la gravedad por la anomalía de Faye.

Este modelo ofrece una resolución y precisión sin precedentes, exponiendo hasta el más mínimo error de incompatibilidad. El logro de mejores resultados en los cálculos, utilizando el geoide EGM08, dependerá de la forma en que las reducciones topográfica y de gravedad se lleven a cabo.



Alturas geoidales en metros EGM2008.-

2.2.2 Modelo geoidal para Uruguay GEOUR06

En 2006 un nuevo modelo geoidal fue determinado para Uruguay por A. Benavidez usando tres técnicas diferentes: RINT (RingINTEgration), LSC (Least Square Collocation) y FFT (Fast Fourier Transform), a partir de los siguientes datos:

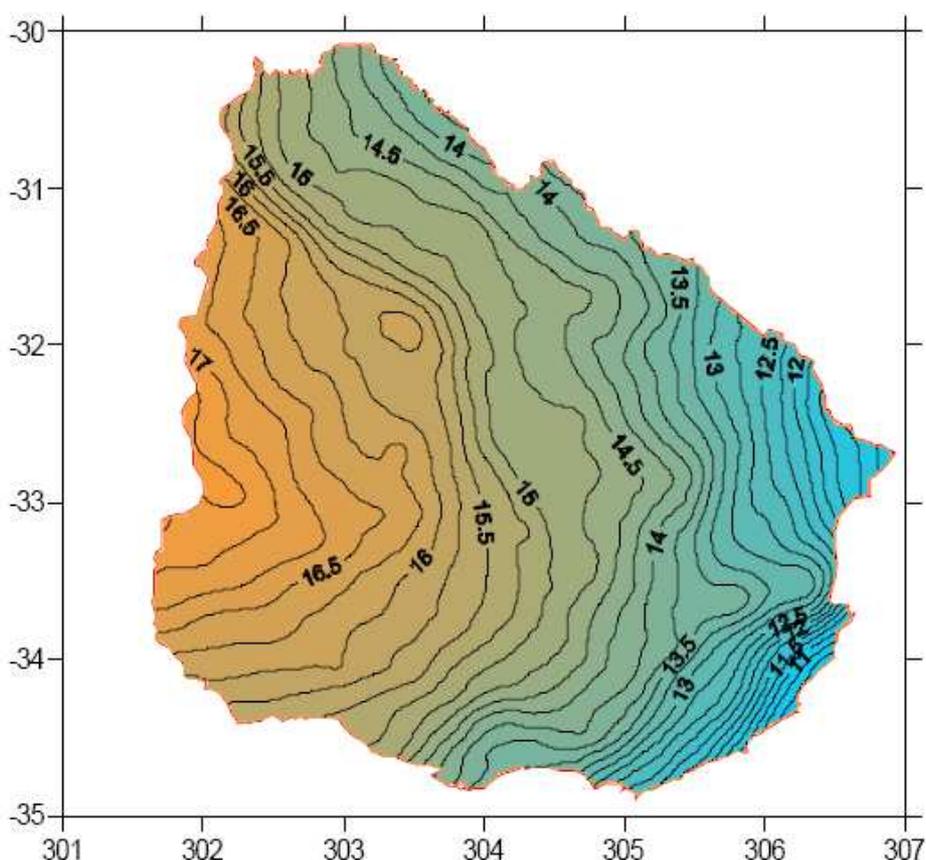
- a- Levantamientos gravimétricos realizados por ANCAP en la zona de la cuenca del noroeste del territorio uruguayo.
- b- Red Gravimétrica Fundamental del Uruguay (2376 datos)
- c- Datos proporcionados por el Bureau Gravimetrique International (BGI).
- d- Relevamiento gravimétricos realizados por ANCAP en la cuenca del Río Santa Lucía.
- e- Archivos altimétricos para la zona, extraídos de la NOAA Satellite and Information Service.
- f- Datos del proyecto SRTM 90m – DTED (Shuttle Radar Topographic Mission – Digital Terrain Elevation Data) de la USGS (United States Geological Service).

Del análisis y comparación de los resultados, efectuada por el autor entre los tres modelos, concluyó que éstos fueron muy próximos (diferencia media de 0.01-0.02 m), lo que validó tanto las técnicas como los resultados.

Los datos de la ondulación del geoide para el GEOUR06 se obtienen a través de un programa de cálculo, el cual viene anexado al libro “GEOUR06 – Modelo Geoidal Gravimétrico para Uruguay” del autor Alberto Benavidez Sosa.

2.2.3 Modelo geoidal para Uruguay URUGEOIDE 2007

El modelo UruGeoide-2007, resultó de la combinación del modelo geopotencial GGM02C, datos gravimétricos terrestres y marinos, así como datos del modelo digital de elevaciones SRTM. La estrategia de cálculo fue determinar, en primer lugar, un cuasi-geoide para después obtener el modelo geoidal. Con esto se dispone de dos modelos de transformación de altitudes (para obtener tanto altitudes normales como ortométricas) y se contribuye con las discusiones de la adopción de un nuevo sistema de altitudes para el país, acorde a lo recomendado por el proyecto SIRGAS. La precisión absoluta del modelo geoidal obtenido es de 2 cm, usándose 50 puntos GPS sobre puntos fijos de nivelación para la adaptación del modelo al Datum Vertical del cero Oficial materializando por la referencia del Cabildo, siendo su uso libre para la comunidad a través de la página web del Servicio Geográfico Militar.



Alturas geoidales en metros UruGeoide2007.-



Sistema de interpolación UruGeoide - 2007.-

Por lo tanto, cuando se efectúan relevamientos por medios satelitales, con posicionadores GPS, el problema altimétrico debe ser tratado cuidadosamente. Como ya vimos, las alturas h que se obtienen con GPS están referidas a un determinado elipsoide.

En cambio las cotas que se obtienen de una red de nivelación convencional (H), por ejemplo las redes de nivelación del Servicio Geográfico Militar, en primera aproximación pueden considerarse alturas con respecto al Nivel Medio del Mar (geoide).

Resulta claro que si se dispone de un modelo geoidal a partir del cual calcular valores de N para cualquier sitio, la expresión $N = h - H$ permite transformar alturas elipsoidales (h) obtenidas con GPS, en alturas sobre el nivel medio del mar haciendo $H = h - N$.

2.3 Marcos y Sistemas de Referencia

2.3.1 Marco de Referencia Geodésico de Montevideo: MRGMVD 2004

El MRGMVD (Marco de Referencia Geodésico de Montevideo) es un marco de referencia desarrollado de acuerdo a los estándares modernos. Calculado en el Sistema de

Referencia "SIRGAS 2000 ITRF 2000", sistema adoptado internacionalmente en la región.

Está compuesta por 30 vértices, ubicados convenientemente en todo el departamento. Los mismos se encuentran en sitios de fácil acceso y han sido monumentados de manera tal de asegurar su perdurabilidad en el tiempo. Esto permite al usuario disponer de un punto de referencia, con coordenadas conocidas en un radio inferior a los 5 km, en todo el Departamento.

Con fecha del 1° de agosto del 2005, en la resolución 3518/05 se dispone, entre otras cosas, que:

- El Sistema de Referencia Espacial para el Departamento de Montevideo, esté constituido por los siguientes componentes geodésicos:

Sistema de Referencia: SIRGAS 2000 ITRF 2000

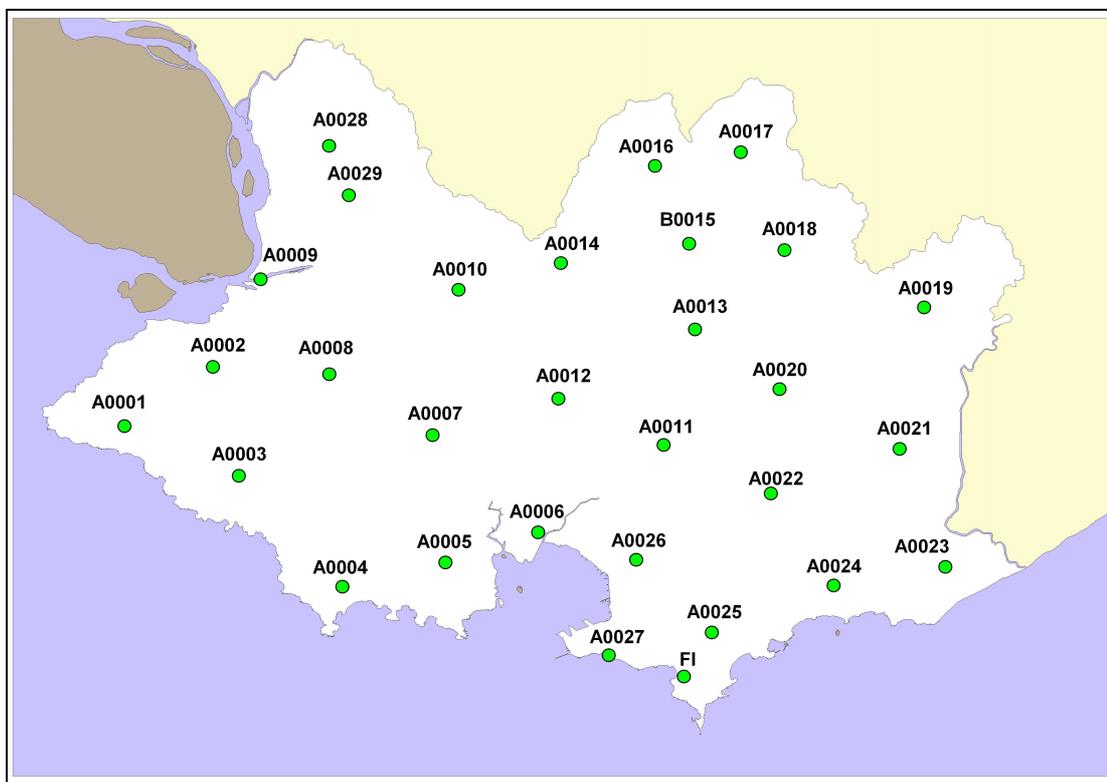
Marco de Referencia: MRGMVD 2004

Proyección Cartográfica: UTM ZONA 21 SUR

Sistema de Referencia Altimétrico: NIVEL MEDIO DE LAS AGUAS DEL PUERTO DE MONTEVIDEO.

- El Servicio de Información Territorial, dependiente del Departamento de Planificación será el responsable del desarrollo, densificación y mantenimiento de la Red Geodésica de Montevideo (MRGMVD2004).

La conformación de esta red geodésica fue realizada conjuntamente por la Facultad de Ingeniería y la Intendencia Municipal de Montevideo (IMM).



Mapa de vértices del MRGMVD2004.-

PTO	UBICACIÓN
A0001	Cno. Del Tropero y Cno. Del Alambrador
A0002	Cno. Gral. Basilio Muñoz y Cno. Del Esquilador
A0003	Cno. Pajas Blancas y Cno. Juan Torora
A0004	Cno. Burdeos
A0005	Cno. Cibils casi Cno. Burdeos
A0006	Luis de la Peña y Ascasubi
A0007	Luis Batlle Berres casi Cno. Tomkinson
A0008	Luis Batlle Berres y Curuzu Cuatía
A0009	Silvestre Ochoa
A0010	Cno. Melilla y Cno. Lezica
A0011	Cementerio del Norte
A0012	Cno. Gral. Máximo Santos y Eugenio Garzón
A0013	Don Pedro de Mendoza y Oficial 1º
A0014	Victor Armand Ugon y Al Paso Calpino
B0015	Don Pedro de Mendoza y Cno. Abrevadero
A0016	Cno. A la Cuchilla Pereira y Cno. Carlos Burmester
A0017	Cno. José Belloni y Cno. América
A0018	Av. De las Instrucciones y Cno. La Calera
A0019	Rotonda Ruta 8 y Ruta 102
A0020	Cap. Tula, Rafael y Calle 6
A0021	Av. Punta de Rieles y Cno. Al Puente Roto
A0022	Con. Maldonado y José Belloni
A0023	Costa Rica y Mones Roses
A0024	Rbla. Concepción del Uruguay y Oviedo
A0025	Rivera y Soca
A0026	Av. Millan y Concepción Arenal
A0027	Rbla. Gran Bretaña y Durazno
A0028	Cno. Felix Buxareo casi Servidumbre de 10mts.
A0029	Cno. De La Redención casi Cno. Seré
FI	Facultad Ingeniería

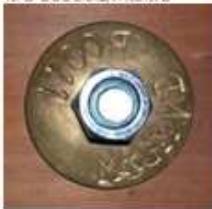
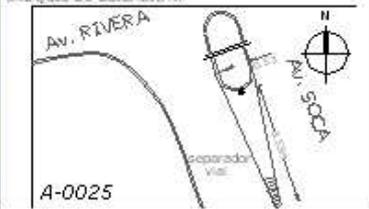
Tabla con la ubicación de los vértices de la MRGMVD2004.-

Se acceden a los datos de la red MRGMVD2004 a través del sitio Web de la Intendencia Municipal de Montevideo (IMM), Servicio de Geomática: www.montevideo.gub.uy/sit

ESTUDIO DE UN SISTEMA DE REFERENCIA GEODÉSICO EN EL DEPARTAMENTO DE MONTEVIDEO



En este sitio se encuentran las monografías de los vértices, en las cuales se encuentran las coordenadas geodésicas del punto, método y procedimiento de determinación del mismo, fecha de observación, croquis de ubicación y fotografía.

 INTENDENCIA MUNICIPAL DE MONTEVIDEO SERVICIO DE GEOMÁTICA MRGMVD 2004		 	
MARCO DE REFERENCIA GEODÉSICO DE MONTEVIDEO			
A-0025			
COORDENADAS	WGS84 - EPOCH 2000		
	LAT: 34°54'11.9673 S	LONG: 56°09'21.2848 W	Alt: 45.136 M
	UTM ZONA 21 SUR	N: 6127352.786 M	E: 577113.068 M
DETERMINACIÓN		METODO Y PROCEDIMIENTO: GPS ESTÁTICO MODO DIFERENCIAL	
Fecha de Observaciones: mayo de 2005		Fecha de Reposición:	
TIPO DE SEÑALAMIENTO		CROQUIS DE UBICACIÓN N°:	
			
FOTOGRAFIA:			
			

Ejemplo de monografía del vértice A0025.-

- *Sistema de Referencia: SIRGAS2000*

SIRGAS es el acrónimo que identifica al Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas que estableció un marco de referencia único para el continente sudamericano.

Es la densificación regional del Marco de Referencia Terrestre Internacional (ITRF), donde inicialmente se estableció para América del Sur y luego se extendió al Caribe, Norte y Centroamérica.

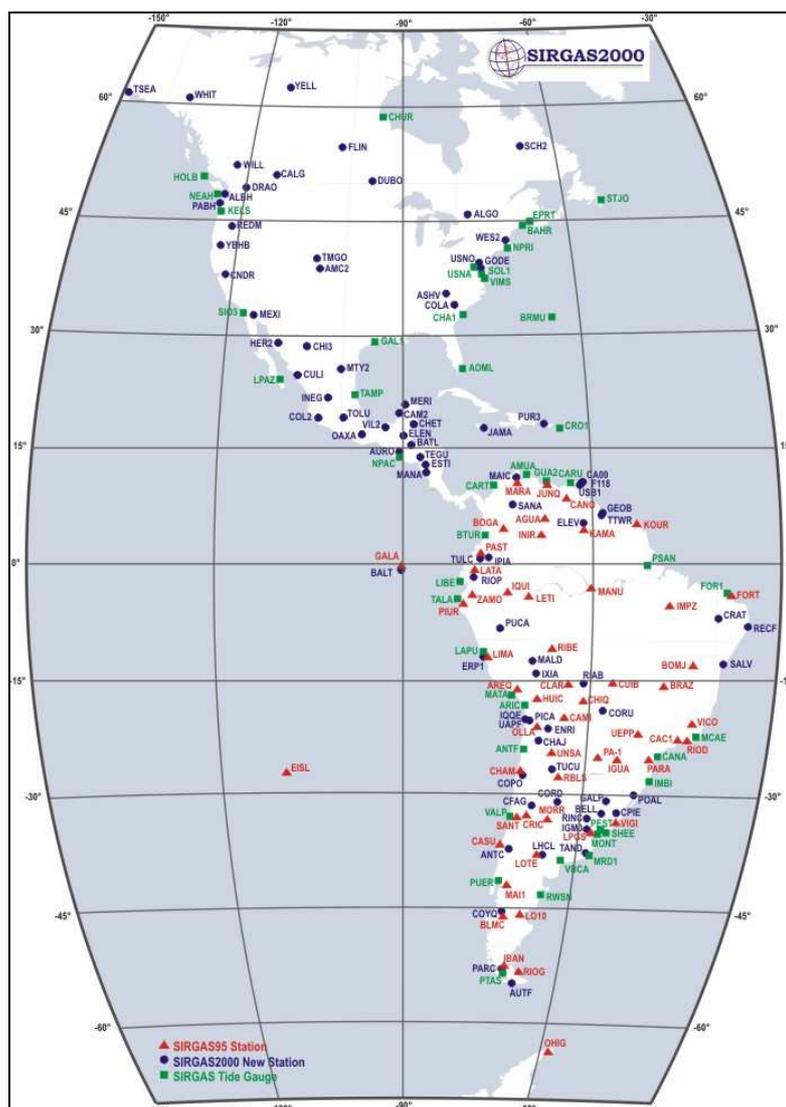
El ITRF es la materialización del Sistema de Referencia Terrestre Internacional (ITRS) constituido por un conjunto de estaciones en la superficie terrestre con coordenadas dadas para una época fija y sus variaciones en el tiempo (velocidades).

La extensión del marco de referencia SIRGAS está dada a través de densificaciones nacionales, las cuales a su vez sirven de marcos de referencia local.

El datum geodésico SIRGAS está definido por el origen, la orientación y la escala del sistema SIRGAS, éste, en combinación con los parámetros del elipsoide GRS80, permite la conversión de coordenadas geocéntricas a geográficas.

La primera campaña SIRGAS de medición se realizó en 1995 (SIRGAS95), mediante observaciones GPS en 58 estaciones distribuidas en 11 países. El procesamiento de los datos se llevó a cabo en el Instituto Alemán de Investigaciones Geodésicas (DGFI) y en Agencia Nacional de Mapas e Imágenes de los Estados Unidos de América (NIMA). La solución final fue presentada en septiembre de 1997, durante la Asamblea de la Asociación Internacional de Geodesia (IAG) en Río de Janeiro, y consistió en una combinación de las soluciones de los dos centros de procesamiento mencionados.

Entre el 10 y el 19 de mayo de 2000 tuvo lugar la segunda campaña, denominada SIRGAS2000, en la cual el número de puntos se ha visto incrementado, con un total de 184 estaciones; y particularmente se vio incrementado sensiblemente el número de estaciones permanentes instaladas en la región, con coordenadas ITRF precisas. Esta segunda campaña tiene por objeto, relacionar el datum vertical con el marco de referencia geocéntrico y aportar datos que permitan, a mediano plazo, evaluar las velocidades tectónicas de los puntos que definen el marco de referencia, las que resultan indispensables para el mantenimiento de un sistema geodésico de alta precisión.



Mapa de estaciones SIRGAS 2000.-

2.3.2 Sistema de Referencia SIRGAS ROU98

El SIRGAS ROU98 es el sistema de referencia adoptado para Uruguay por el Servicio Geográfico Militar, basado en SIRGAS época 1995.4. Éste surge luego del ajuste realizado a partir de la observación de tres vértices de Laplace durante diez días, otros cinco vértices durante tres días en la campaña SIRGAS 1995 y otros tres vértices adicionales observados durante dos días en 1997 en otra campaña de densificación GPS, y así vinculando éstos últimos a los vértices SIRGAS calculados en 1995.

2.3.3 Sistema altimétrico Consejo Departamental de Montevideo CDM

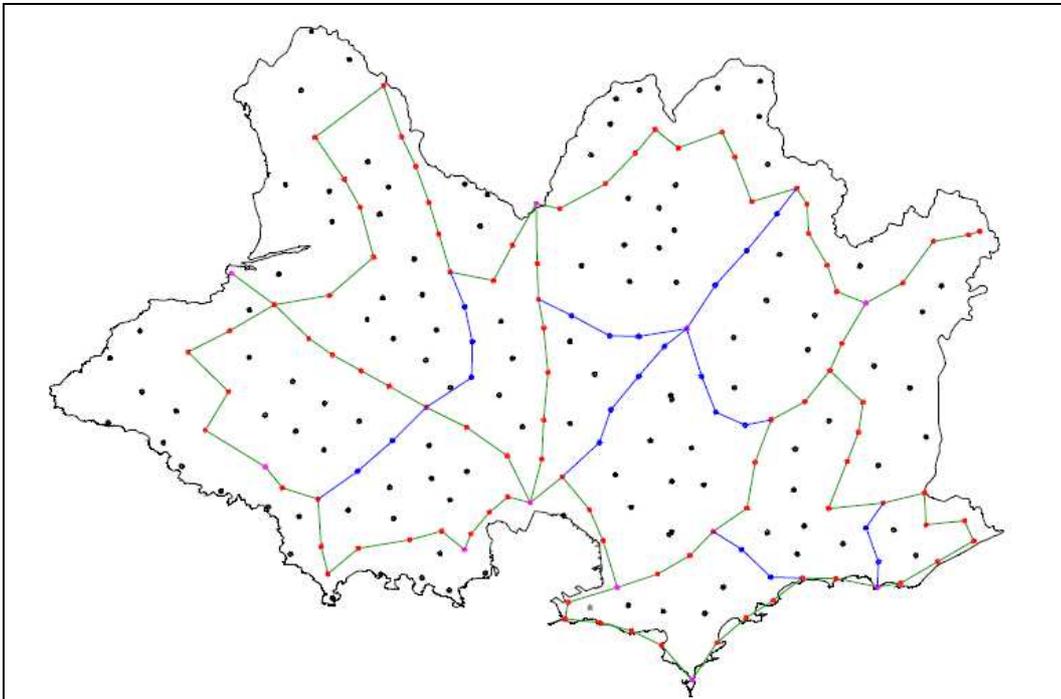
El sistema altimétrico local CDM se determinó a partir de la fijación del datum vertical, o también conocido como cero, el cual se estableció según decreto del año 1948,

que determina que el sistema de alturas tiene cero oficial (origen de la escala) a 22.97 m por debajo del repere ubicado en el edificio del Cabildo.

Este valor fue adoptado a partir de observaciones del nivel medio de las aguas en el puerto de Montevideo, analizadas en un período superior a los 20 años. De esta manera se buscó la coincidencia entre el datum vertical y el nivel medio del mar.

Una vez establecido el cero de la escala, la determinación de la red altimétrica se efectuó, en el año 1958, mediante cuatro polígonos cerrados, cuyos lados constituyen líneas de nivelación geométrica de alta precisión, líneas de primer orden. Estos polígonos cerrados permitieron realizar un ajuste a partir del cierre de los mismos. Posteriormente, se establecieron líneas de segundo orden, y en la etapa final se procedió a una densificación mediante puntos de tercer y cuarto orden.

En el año 1970, se hizo una revisión y eventual reposición de los puntos faltantes o destruidos.



Red altimétrica CDM.-

3. ACTUALIZACIÓN Y DETERMINACIÓN DE COTAS OFICIALES Y COORDENADAS GEODÉSICAS DEL MRGMVD 2004.

3.1 Reconocimiento y evaluación del estado de conservación de los vértices de la red geodésica de Montevideo MRGMVD2004.

Cada uno de los vértices de esta red posee un punto cercano de reposición. El vértice principal se identifica con la inicial “A” y el de reposición con la “B”; por ejemplo el vértice 1 cuenta con los puntos A0001 y B0001.

En la tabla que se muestra a continuación, se describen los puntos hallados en buen estado, los extraviados (destruido), los que se encuentran en mal estado (deteriorado) y los que fueron repuestos (colocado).

VERTICE	ESTADO		
	Pto. A	Pto. B	Pto. C
1	Bien	Bien	
2	Bien	No fue encontrado	
3	Bien	No fue encontrado	
4	Deteriorado	Destruído	Colocado
5	Destruído	No fue encontrado	Colocado
6	Bien	Destruído	
7	Bien	No fue encontrado	
8	Bien	Bien	
9	Destruído	No fue encontrado	Colocado
10	Destruído	Bien	
11	Bien	Destruído	
12	Destruído	Destruído	Colocado
13	Bien	Bien	
14	Bien	No fue encontrado	
15	No fue encontrado	Destruído	Colocado
16	Destruído	Bien	
17	Deteriorado	Bien	
18	Bien	Destruído	
19	Bien	Bien	
20	Deteriorado	Destruído	Colocado
21	Bien	Bien	
22	Bien	Bien	
23	Bien	Bien	
24	Destruído	Bien	
25	Bien	Bien	
26	Bien	Deteriorado	
27	Bien	Bien	
28	Bien	Bien	
29	Bien	Deteriorado	
FI	Bien	No tiene	

En los vértices en donde el punto A se encontró destruido, se utilizará el punto B correspondiente, y en el caso que tampoco se encontrara el B se repuso el vértice en una nueva ubicación cercana y se lo identificó con la letra "C".

3.2 Nivelación geométrica para la determinación de las cotas oficiales de los vértices de la red geodésica MRGMVD2004.

Para obtener las cotas oficiales de la red MRGMVD 2004 se utilizó la red altimétrica CDM. Los puntos que conforman esta red poseen monografías que se encuentran en el Servicio de Geomática de la Intendencia Municipal de Montevideo. Las mismas cuentan con, cota, ubicación y croquis de ubicación del punto fijo, fotografía y tipo de materialización.

SERVICIO GEOGRÁFICO
1ª DIVISIÓN "GEODESIA"
3ª SECCIÓN "NIVELACION"

NIVELACIÓN GEOMÉTRICA DEL
DEPARTAMENTO DE MONTEVIDEO
1958

ELEMENTOS DE IDENTIFICACIÓN DEL PUNTO FIJO:

1-0312-C ALTITUD: 34 = 520,6
(REFERENCIA GRÁFICA G-16)

A) UBICACIÓN

GENERAL: Camino Maldonado Knt. 12,800 y Avda. 17 mts.-
(Punta de Rieles).-

PARTICULAR: En la pared N.E. del Colegio.- Junto al costado N.
de un banco de material, adosado a la mencionada p
red.-

B) MONOGRAFÍA

PARAJE: Punta de Rieles.-

SECCION POLICIAL: 26a.-

SECCION JUDICIAL: 11a.-

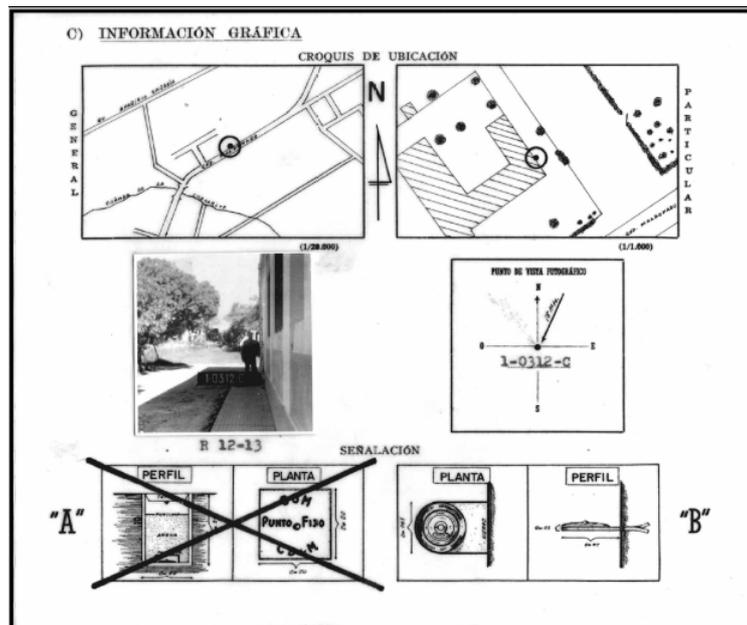
PROPIETARIO: Colegio de Hermanas (Finca No. 6641 de Cno. Maldonado)

ARRENDATARIO: -----

OCUPANTE: -----

PERSONA QUE CONOCE EL PUNTO: Servicio Geográfico Militar.-

ACCESO (S): Desde Cuchilla Grande y Cno. Maldonado, por éste ha-
cia el N.E. hasta el Knt. 12,800.-

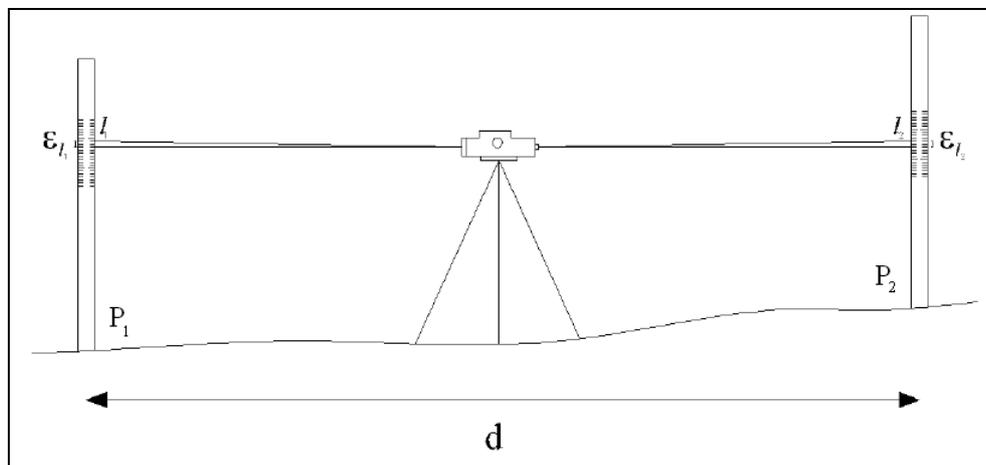


La tabla a continuación, muestra los puntos CDM utilizados en la nivelación para los respectivos vértices de la red geodésica MRGMVD2004.

A0001	3-0086	A0016	1-0610-C
A0002	1-1203-C	A0017	1-0608-A
A0003	Nodal Pajas Blancas	A0018	2-0602-D
C0004	1-1104-C	A0019	3-0112
C0005	1-1003-D	C0020	3-0030
A0006	Nodal La Teja	A0021	1-0311-D
A0007	1-0903-D	A0022	1-0405-C
A0008	1-0905-D	A0023	1-0304-A
C0009	1.21.003	B0024	3-0006
B0010	1-0803-D	A0025	3-0003
A0011	3-0022	A0026	1-0501-A
C0012	Pto. 8	A0027	1-0103-A
A0013	3-0036	A0028	1-0810-B
A0014	1-0706-B	A0029	1-0812-A
C0015	3-0039	F.I.	1-0101-A

Para la determinación de la cota oficial de cada punto de la red MRGMVD 2004 se realizó una nivelación geométrica doble, lo que nos permitió llevar un control de la misma.

Las tolerancias para el cierre de cada nivelación se obtuvieron a partir del siguiente pre-análisis.



Esquema de errores en nivelación.-

La distancia d corresponde a la distancia entre las miras, que para una nivelación geométrica debe ser no mayor a 100m. Por lo que:

$$d = 100\text{m}$$

El desnivel entre los puntos P1 y P2 viene dado por la diferencias de lectura:

$$\Delta h = l_2 - l_1$$

A su vez, se considera que el error en la lectura de una mira, para una distancia menor a 50m, no deberá superar a 1mm:

$$\Rightarrow \varepsilon_{l1} = \varepsilon_{l2} = \sigma_l = \pm 1\text{mm}$$

Resultando:

$$\sigma^2_{\Delta h} = \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial l_1}\right)^2 \cdot \sigma_l^2 + \left(\frac{\partial \Delta h}{\partial l_2}\right)^2 \cdot \sigma_l^2 = 2\sigma_l^2 \Rightarrow \sigma_{\Delta h} = \sqrt{2} \cdot \sigma_l$$

La distancia total D entre el punto de partida y de llegada de la nivelación es la sumatoria de n tramos, o sea, la sumatoria de n distancias d .

$$\Rightarrow D = d_1 + d_2 + \dots + d_n$$

$$\sigma^2_{\Delta H} = \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \Delta h_1}\right)^2 \cdot \sigma^2_{\Delta h} + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \Delta h_2}\right)^2 \cdot \sigma^2_{\Delta h} + \dots + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial \Delta h_n}\right)^2 \cdot \sigma^2_{\Delta h} = n \cdot \sigma^2_{\Delta h}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \sigma_{\Delta H} &= \sqrt{n} \cdot \sigma_{\Delta h} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma_l \\ D &= n \cdot d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sigma_{\Delta H} = \sqrt{\frac{D}{50}} \cdot \sigma_l$$

Por lo tanto, la desviación estándar de cada nivelación queda definida por la expresión anterior, donde D variará dependiendo de la longitud de cada tramo.

Obtenemos entonces una tolerancia T , cuyo valor dependerá de la extensión de los mismos:

$$T = 3\sigma_{\Delta H}$$

A modo de ejemplo, se describen los cálculos de las tolerancias de la nivelación para los tramos de menor y mayor longitud.

- Punto A0006, distancia aproximada $D = 15$ m
- Punto A0019, distancia aproximada $D = 2100$ m

Llamaremos al error en el cierre de la nivelación ε .

Calculando la tolerancia: $T_{A0006} = 0.004$ m y
 $T_{A0019} = 0.020$ m.

Los errores de cierre en estos puntos fueron: $\varepsilon_{A0006} = 0.001$ m y
 $\varepsilon_{A0019} = 0.002$ m.

Por lo tanto, la nivelación en estos puntos se encuentra dentro de las tolerancias establecidas.

De esta misma forma, se efectuó la verificación en la totalidad de los puntos, corroborando que se encuentran todos dentro de las respectivas tolerancias.

Finalmente, se obtuvieron las cotas oficiales para todos los vértices de la red geodésica MRGMVD 2004, que se detallarán más adelante en los resultados.

3.3 Mediciones GPS de los puntos de la red geodésica de Montevideo para la obtención de las coordenadas geodésicas.

El instrumental utilizado fue un receptor geodésico ASHTECH, con una antena modelo ASH 700718.B.



Receptor ASHTECH.-

▪ *Características del receptor*

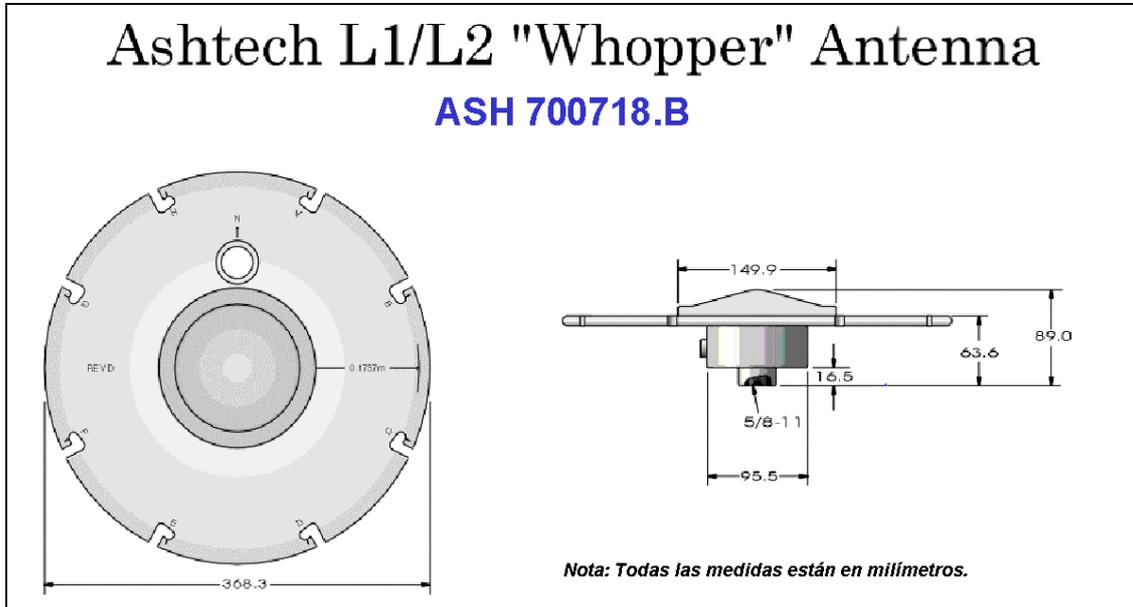
- Precisión: Método Estático $\pm (5\text{mm} + 1\text{ppm})$, Método Cinemático $\pm (10\text{mm} + 1\text{ppm})$. Precisiones sub-centimétricas para ocupaciones de largo tiempo.

- Tiene la posibilidad de rastrear hasta 12 satélites. (12 Channel *All-In-View* operation) Mide en fase sobre las frecuencias L1 y L2 y las pseudo-distancias P1 y P2.

- Reducción del multicamino.

- Tamaño: 76x193x209 mm, 1.7 Kg.

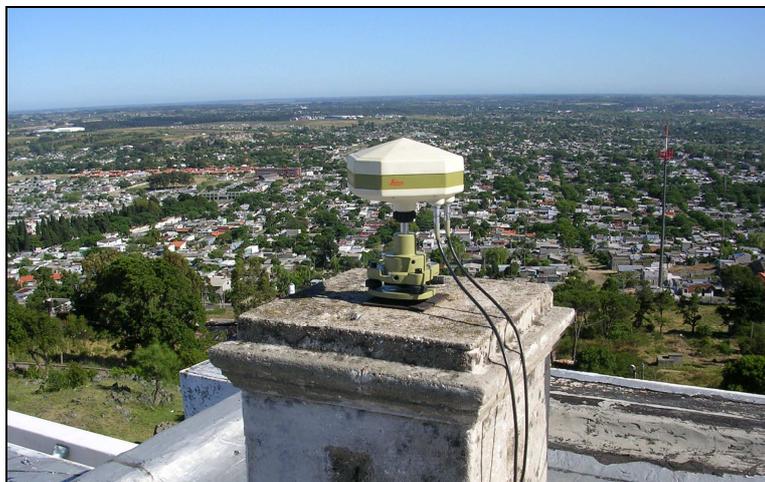
- Consumo de potencia: 18W, baterías externas, y otras fuentes de potencia.
- Cuatro puertos RS232 para comunicación de datos.
- Display LED de 8 caracteres.



Antena ASH 700718.B.-

El relevamiento con GPS fue realizado utilizando el método diferencial estático con post-proceso, en el cual se tomo un vector base: UYMO-MONT (Servicio Geográfico Militar SGM – Ministerio de Transporte y Obras Públicas MTOP).

UYMO es una de las estaciones permanentes que el SGM instaló para establecer y mantener un nuevo y moderno marco de referencia para todo el país llamado REGNA-ROU (Red Geodésica Nacional Activa de la ROU). La misma se materializó en la Fortaleza del Cerro de Montevideo, en el Museo “General Artigas” contando con un módulo destinado para la colocación del receptor y fuente de energía y por otro lado la antena.



Estación permanente UYMO.-

La estación GPS MONT se encuentra ubicada en el techo del edificio de la dirección del Ministerio de Transporte y Obras Pública, posicionando su antena sobre un pilar de hormigón armado correspondiente a la estructura del edificio, libre de obstáculos e interferencias.

Los datos de ambas estaciones están a disposición del usuario en las respectivas páginas web.

Se utilizó como coordenadas de partida las coordenadas oficiales de la estación UYMO en el sistema SIRGAS ROU 98 publicadas en la página oficial del SGM. Luego, partiendo de éstas, se ajustó el punto MONT utilizando observaciones de 2 días.

Una vez ajustado, se mantiene fijo al punto MONT, para junto con el punto UYMO conformar el vector base que servirá para ajustar todos los puntos de la red geodésica.

El tiempo de observación en cada punto debe de asegurarnos la resolución de las ambigüedades y depende fundamentalmente de la longitud de la línea, de la cantidad de satélites y de la geometría de estos (dilución de la precisión).

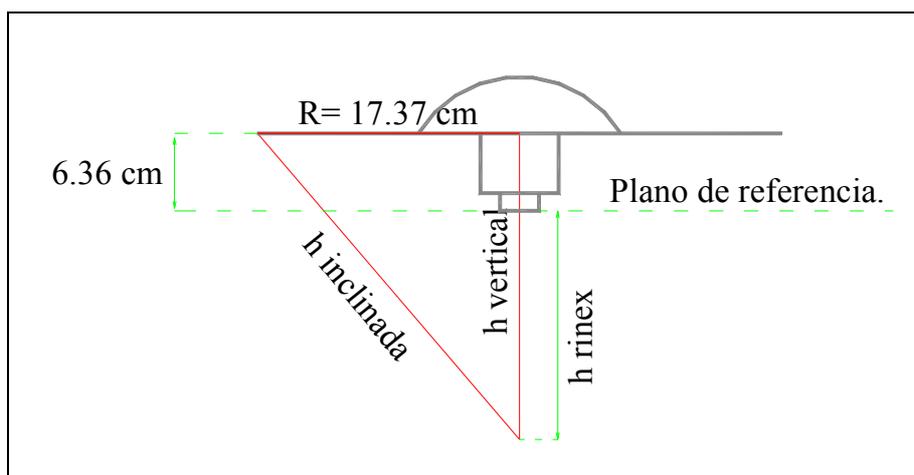
Para esto existen consideraciones que ayudan a llegar a la solución requerida, como que a mayor tiempo de observación obtenemos mejor precisión en el posicionamiento, cuanto menor sea la distancia entre los puntos mas rápido converge la solución. También existe un tiempo mínimo a considerar para resolver las ambigüedades según la distancia entre los puntos y a mayor distancia entre ellos mayor será el efecto ionosférico.

En nuestra zona de estudio, la distancia entre los puntos a relevar y los puntos que conforman el vector base UYMO-MONT no superan los 20 Km. aproximadamente, por lo que en este caso el principal error a tener en cuenta es el error de multicamino, que en tiempos cortos son muy difíciles de detectar.

Atendiendo a todo lo dicho anteriormente, es que en nuestro relevamiento GPS se va a ocupar cada punto un tiempo no menor a 20 minutos, con un intervalo de grabación de 5 segundos, verificando que el PDOP no sea un valor mayor a 5-6. Con respecto al multicamino, utilizaremos una máscara de 15 grados la cual evita que las señales con poca elevación lleguen a la antena, reduciendo así este error.

A posteriori, una vez ya tomadas en cuenta las anteriores consideraciones se pasa al trabajo de campo en el cual se lleva a cabo el relevamiento de cada uno de los puntos, respetando el tiempo de observación y midiendo la altura del receptor para utilizarla luego en el post-proceso de los datos.

En este caso, en cada punto se midieron 2 alturas inclinadas (h_{i1} , h_{i2}) diametralmente opuestas, obteniendo así una altura inclinada promedio (h inclinada). Aplicando fórmulas trigonométricas sobre el triangulo formado por el radio de la antena del receptor ($R= 17.37$ cm), la altura inclinada promedio (h inclinada) y la altura vertical (h vertical), se obtiene el valor de esta última. A este valor (h vertical) se le resta 6.36 cm para así obtener la altura sobre el plano de referencia (h rinex), que es la altura que se ingresó al archivo rinex de cada punto.



Esquema de alturas de antena en relevamiento GPS.-

En la tabla que se muestra a continuación, se detallan las alturas inclinadas medidas y las alturas verticales y rinex calculadas para cada punto.

Punto	hi1	hi2	h inclinada	h vertical	h rinex
A0001	1.392	1.391	1.392	1.3806	1.3170
A0002	1.339	1.339	1.339	1.3277	1.2641
A0003	1.259	1.260	1.260	1.2475	1.1839
C0004	1.428	1.427	1.428	1.4169	1.3533
C0005	1.436	1.437	1.437	1.4260	1.3624
A0006	1.536	1.535	1.536	1.5256	1.4620
A0007	1.459	1.459	1.459	1.4486	1.3850
A0008	1.511	1.512	1.512	1.5015	1.4379
C0009	0.157	0.155	0.156		0.0744
B0010	1.069	1.069	1.069	1.0548	0.9912
A0011	1.516	1.516	1.516	1.5060	1.4424
C0012	1.411	1.411	1.411	1.4003	1.3367
A0013	1.252	1.252	1.252	1.2399	1.1763
A0014	1.220	1.218	1.219	1.2066	1.1430
C0015	1.535	1.535	1.535	1.5251	1.4615
B0016	1.327	1.328	1.328	1.3161	1.2525
B0017	1.242	1.242	1.242	1.2298	1.1662
A0018	1.184	1.185	1.185	1.1717	1.1081
A0019	1.619	1.619	1.619	1.6097	1.5461
C0020	1.394	1.394	1.394	1.3831	1.3195
A0021	1.083	1.084	1.084	1.0695	1.0059
A0022	1.651	1.652	1.652	1.6423	1.5787
A0023	1.473	1.474	1.474	1.4632	1.3996
B0024	1.527	1.527	1.527	1.5171	1.4535
A0025	1.217	1.218	1.218	1.2050	1.1414
A0026	1.423	1.423	1.423	1.4124	1.3488
A0027	1.425	1.425	1.425	1.4144	1.3508
A0028	1.694	1.693	1.694	1.6846	1.6210
A0029	1.270	1.271	1.271	1.2586	1.1950
FI				0.1390	0.0754

Tabla con alturas medidas en campo.-

Luego del trabajo de campo, comienza la etapa de procesamiento de los datos, que comienza con la descarga de los datos de las observaciones del receptor.

En el post-proceso se utilizó como vector base las estaciones UYMO-MONT. A partir de este vector se procesaron y ajustaron todos los demás puntos de la red, 30 puntos en su totalidad.

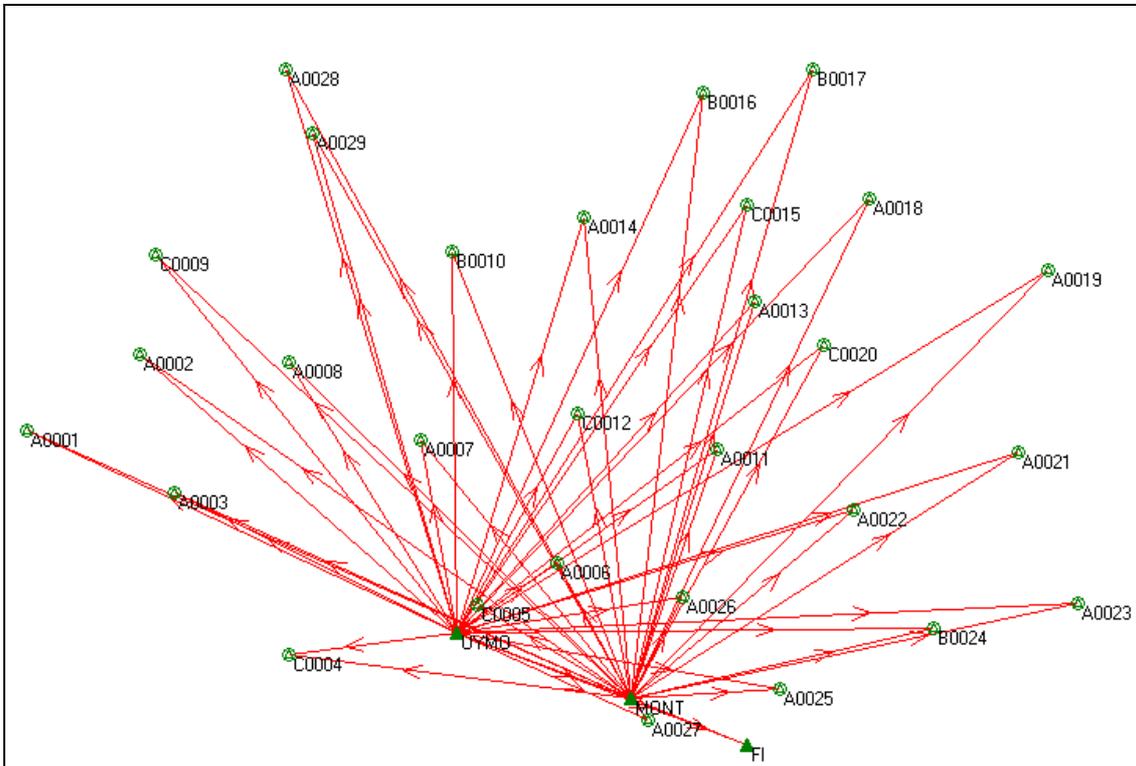


Gráfico del post-proceso.-

3.4 Resultados

Culminada esta primera etapa del trabajo, obtenemos las coordenadas geodésicas resultantes del post-proceso de los datos conseguidos con el relevamiento GPS, y las cotas oficiales, provenientes de la nivelación geométrica, para todos los vértices del marco de referencia geodésico de Montevideo MRGMVD 2004.

Pto.	φ	λ	h	H
A0001	34° 50' 03.62847" S	56° 23' 50.74265" W	52.336	37.160
A0002	34° 48' 50.15804" S	56° 21' 40.71882" W	31.738	16.617
A0003	34° 51' 03.90041" S	56° 21' 01.34400" W	47.795	32.738
C0004	34° 53' 39.18803" S	56° 18' 48.29286" W	26.460	11.569
C0005	34° 52' 51.08662" S	56° 15' 11.12768" W	38.621	23.707
A0006	34° 52' 10.51559" S	56° 13' 39.14527" W	18.963	4.050
A0007	34° 50' 12.24096" S	56° 16' 15.79451" W	32.883	17.885
A0008	34° 48' 58.41056" S	56° 18' 48.89869" W	32.297	17.179
C0009	34° 47' 15.35011" S	56° 21' 21.55251" W	18.815	3.670
B0010	34° 47' 12.77503" S	56° 15' 39.65582" W	64.711	49.663
A0011	34° 50' 21.97306" S	56° 10' 34.76252" W	37.362	22.455
C0012	34° 49' 47.92566" S	56° 13' 14.63119" W	55.971	40.963
A0013	34° 47' 59.82957" S	56° 09' 49.95635" W	44.541	29.588
A0014	34° 46' 39.66530" S	56° 13' 08.52282" W	58.039	43.022
C0015	34° 46' 26.91379" S	56° 10' 00.34909" W	63.822	48.891
B0016	34° 44' 39.73253" S	56° 10' 51.19202" W	96.453	81.379
B0017	34° 44' 17.06139" S	56° 08' 44.82543" W	82.836	67.878
A0018	34° 46' 21.44130" S	56° 07' 39.05887" W	58.159	43.284
A0019	34° 47' 30.47065" S	56° 04' 12.45160" W	48.621	33.869
C0020	34° 48' 41.84647" S	56° 08' 30.36508" W	60.617	45.652
A0021	34° 50' 24.46858" S	56° 04' 46.56563" W	42.877	28.134
A0022	34° 51' 20.49630" S	56° 07' 55.85585" W	72.905	58.151
A0023	34° 52' 48.92768" S	56° 03' 37.34870" W	21.332	6.794
B0024	34° 53' 13.03699" S	56° 06' 23.42432" W	26.708	12.045
A0025	34° 54' 11.96940" S	56° 09' 21.39335" W	45.174	30.468
A0026	34° 52' 43.46587" S	56° 11' 13.96007" W	33.396	18.591
A0027	34° 54' 41.01215" S	56° 11' 53.43907" W	25.184	10.472
A0028	34° 44' 17.72820" S	56° 18' 51.57568" W	26.314	11.161
A0029	34° 45' 18.36155" S	56° 18' 21.95424" W	43.832	28.692
FI	34° 55' 05.89148" S	56° 09' 59.98446" W	71.936	57.241

Resultados finales: Coordenadas geodésicas y alturas oficiales.-

4. DETERMINACIÓN Y VALIDACIÓN DE UN MODELO DE TRANSFORMACIÓN DE ALTURAS PARA EL DEPARTAMENTO DE MONTEVIDEO

4.1 *Análisis de ΔN*

Como vimos anteriormente, luego de efectuada la nivelación geométrica y el relevamiento GPS, para cada punto de la red geodésica de Montevideo MRGMVD 2004 se obtuvieron los siguientes datos:

- Altura geométrica CDM (H).
- Latitud, longitud y altura elipsoidal en WGS 84 (φ , λ , h).

A su vez, a partir de las coordenadas geodésicas WGS 84 de los puntos y aplicando un modelo geoidal (EGM 2008 y GEOUR06 (Benavides) referidos al elipsoide WGS 84) podemos obtener el valor de la ondulación del geoida (N) para cada uno de ellos.

Punto	<i>N</i>EGM2008	<i>N</i>GEOUR06
A0001	14.852	14.809
A0002	14.840	14.851
A0003	14.771	14.704
C0004	14.644	14.525
C0005	14.587	14.611
A0006	14.576	14.671
A0007	14.697	14.771
A0008	14.782	14.837
C0009	14.869	14.923
B0010	14.759	14.942
A0011	14.565	14.800
C0012	14.646	14.818
A0013	14.621	14.906
A0014	14.726	14.962
C0015	14.665	14.978
B0016	14.680	15.052
B0017	14.643	15.080
A0018	14.614	14.990
A0019	14.491	14.921
C0020	14.570	14.874
A0021	14.401	14.755
A0022	14.461	14.731
A0023	14.258	14.556
B0024	14.336	14.570
A0025	14.376	14.535
A0026	14.493	14.647
A0027	14.426	14.504
A0028	14.833	15.039
A0029	14.848	15.009
FI	14.310	14.459

Tabla de datos.-

El desarrollo del problema se resuelve de igual forma para los dos Modelos geoidales planteados, EGM 2008 y GEOUR06. En esta oportunidad se planteará el problema utilizando el modelo geoidal EGM 2008.

Utilizando las coordenadas geodésicas y la ondulación del geoide ($N_{EGM\ 2008}$) para cada punto, obtenemos la altura ortométrica referida al EGM 2008 ($H_{EGM\ 2008}$) aplicando la siguiente fórmula:

$$h_{WGS84} = H_{EGM\ 2008} + N_{EGM\ 2008}$$

Si se considera que en la zona de estudio, Departamento de Montevideo, las superficies equipotenciales de la gravedad tienen un no paralelismo despreciable, y que el origen de las alturas coincide con el geoide, entonces se puede aproximar las alturas del CDM con alturas ortométricas. Haciendo esta apreciación, obtenemos:

$$h_{WGS84} = H_{CDM} + N_{CDM}$$

Dados los datos, altura elipsoidal referida al WGS 84 (h_{WGS84}) y altura ortométrica CDM calculamos la ondulación de geoide (N_{CDM}).

Igualando expresiones:

$$H_{EGM\ 2008} + N_{EGM\ 2008} = H_{CDM} + N_{CDM}$$

$$\left. \begin{array}{l} H_{CDM} = H_{EGM\ 2008} + (N_{EGM\ 2008} - N_{CDM}) \\ \Delta N = N_{EGM\ 2008} - N_{CDM} \end{array} \right\} H_{CDM} = H_{EGM\ 2008} + \Delta N$$

El valor de ΔN lo conocemos para cada punto de la red, siendo un valor acotado producto de las simplificaciones realizadas. A partir de estos valores, se efectúa un modelamiento matemático, generando una función con la cual se podrá estimar dicho valor para todos los puntos de la zona en estudio.

Por lo cual, partiendo de las coordenadas geodésicas de un punto y la ondulación derivada del modelo geoidal se obtendrá la altura ortométrica en el sistema CDM.

$$H_{CDM} = h - N_{EGM\ 2008} + \Delta N$$

Según Vergos G. S. y M. G. Sideris, con una muestra de datos de ΔN distribuida homogéneamente en una zona de estudio, es posible modelar dicha diferencia.

Para el modelado, se pueden utilizar distintas funciones paramétricas. Las que utilizaremos son las siguientes:

1) Trigonometría Clásica, 4 parámetros:

$$X_1 + X_2(\cos \varphi \cdot \cos \lambda) + X_3(\cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda) + X_4 \text{sen} \varphi$$

Planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1 + X_2(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_3(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_4 \text{sen} \varphi_i + v_i$$

2) Trigonometría Clásica, 5 parámetros:

$$X_1 + X_2(\cos \varphi \cdot \cos \lambda) + X_3(\cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda) + X_4 \text{sen} \varphi + X_5 \text{sen}^2 \varphi$$

Planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1 + X_2(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_3(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_4 \text{sen} \varphi_i + X_5 \text{sen}^2 \varphi_i + v_i$$

3) Modelo de transformación de similitud diferencial, 5 parámetros:

$$X_1(\cos \varphi \cdot \cos \lambda) + X_2(\cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda) + X_3 \text{sen} \varphi + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda}{W} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda}{W} \right)$$

Planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_2(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_3 \text{sen} \varphi_i + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i}{W_i} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} \right) + v_i$$

4) Modelo de transformación de similitud diferencial, 6 parámetros:

$$X_1(\cos \varphi \cdot \cos \lambda) + X_2(\cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda) + X_3 \text{sen} \varphi + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda}{W} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda}{W} \right) + X_6(a \cdot W + h)$$

Planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_2(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_3 \text{sen} \varphi_i + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i}{W_i} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} \right) + X_6(a \cdot W_i + h_i) + v_i$$

5) Modelo de transformación de similitud diferencial, 7 parámetros:

$$X_1(\cos \varphi \cdot \cos \lambda) + X_2(\cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda) + X_3 \text{sen} \varphi + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda}{W} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda}{W} \right) + X_6(a \cdot W + h) + X_7 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}{W} \right)$$

Planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_2(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_3 \text{sen} \varphi_i + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i}{W_i} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} \right) + X_6(a \cdot W_i + h_i) + X_7 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}_i^2 \varphi}{W_i} \right) + v_i$$

Donde a , e y f son el eje mayor, excentricidad y achatamiento, respectivamente, referidos al elipsoide WGS84 y $W_i = \sqrt{1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi_i}$.

Para el cálculo de los parámetros, queremos que los residuales v sean mínimos, para esto empleamos el método de Mínimos Cuadrados.

Deteniéndonos en la primera función, si consideramos n puntos, se generarán n ecuaciones, por lo que obtenemos un sistema lineal de n ecuaciones con 4 incógnitas. O sea que, si n es mayor a 4 el sistema es sobredeterminado y su solución se halla, como ya mencionamos, por el método de mínimos cuadrados.

$$\left. \begin{array}{l} \Delta N_1 = X_1 + X_2(\cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1) + X_3(\cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1) + X_4 \text{sen} \varphi_1 + v_1 \\ \Delta N_2 = X_1 + X_2(\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) + X_3(\cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2) + X_4 \text{sen} \varphi_2 + v_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i = X_1 + X_2(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_3(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_4 \text{sen} \varphi_i + v_i \\ \vdots \\ \Delta N_n = X_1 + X_2(\cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n) + X_3(\cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n) + X_4 \text{sen} \varphi_n + v_n \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \cos \varphi_1 \text{sen} \lambda_1 & \text{sen} \varphi_1 \\ 1 & \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 & \cos \varphi_2 \text{sen} \lambda_2 & \text{sen} \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \varphi_i \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \text{sen} \lambda_i & \text{sen} \varphi_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \varphi_n \cos \lambda_n & \cos \varphi_n \text{sen} \lambda_n & \text{sen} \varphi_n \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{array} \right] \Rightarrow \boxed{A \Delta = f}$$

$f \qquad \qquad \qquad A \qquad \qquad \qquad \Delta$

Análogamente, se obtienen las ecuaciones para la función de 5 parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1 + X_2(\cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1) + X_3(\cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1) + X_4 \text{sen} \varphi_1 + X_5 \text{sen}^2 \varphi_1 + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1 + X_2(\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) + X_3(\cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2) + X_4 \text{sen} \varphi_2 + X_5 \text{sen}^2 \varphi_2 + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1 + X_2(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_3(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_4 \text{sen} \varphi_i + X_5 \text{sen}^2 \varphi_i + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1 + X_2(\cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n) + X_3(\cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n) + X_4 \text{sen} \varphi_n + X_5 \text{sen}^2 \varphi_n + v_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{bmatrix} \\ f \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \cos \varphi_1 \text{sen} \lambda_1 & \text{sen} \varphi_1 & \text{sen}^2 \varphi_1 \\ 1 & \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 & \cos \varphi_2 \text{sen} \lambda_2 & \text{sen} \varphi_2 & \text{sen}^2 \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \varphi_i \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \text{sen} \lambda_i & \text{sen} \varphi_i & \text{sen}^2 \varphi_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \varphi_n \cos \lambda_n & \cos \varphi_n \text{sen} \lambda_n & \text{sen} \varphi_n & \text{sen}^2 \varphi_n \end{bmatrix} \\ A \end{matrix} * \begin{matrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \\ \Delta \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A \cdot \Delta = f}$$

De igual forma, se obtienen las ecuaciones para el Modelo de transformación de similitud diferencial para 5, 6 y 7 parámetros.

3) 5 parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1(\cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1) + X_2(\cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1) + X_3 \text{sen} \varphi_1 + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1}{W_1} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1}{W_1} \right) + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1(\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) + X_2(\cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2) + X_3 \text{sen} \varphi_2 + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2}{W_2} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2}{W_2} \right) + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_2(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_3 \text{sen} \varphi_i + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i}{W_i} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} \right) + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1(\cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n) + X_2(\cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n) + X_3 \text{sen} \varphi_n + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n}{W_n} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n}{W_n} \right) + v_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{bmatrix}}_f = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \cos \varphi_1 \text{sen} \lambda_1 & \text{sen} \varphi_1 & \frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1}{W_1} & \frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1}{W_1} \\ \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 & \cos \varphi_2 \text{sen} \lambda_2 & \text{sen} \varphi_2 & \frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2}{W_2} & \frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2}{W_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_i \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \text{sen} \lambda_i & \text{sen} \varphi_i & \frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i}{W_i} & \frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_n \cos \lambda_n & \cos \varphi_n \text{sen} \lambda_n & \text{sen} \varphi_n & \frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n}{W_n} & \frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n}{W_n} \end{bmatrix}}_A * \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}}_{\Delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A \cdot \Delta = f}$$

4) 6 parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1(\cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1) + X_2(\cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1) + X_3 \text{sen} \varphi_1 + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1}{W_1} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1}{W_1} \right) + X_6(a \cdot W_1 + h_1) + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1(\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) + X_2(\cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2) + X_3 \text{sen} \varphi_2 + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2}{W_2} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2}{W_2} \right) + X_6(a \cdot W_2 + h_2) + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_2(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_3 \text{sen} \varphi_i + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i}{W_i} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} \right) + X_6(a \cdot W_i + h_i) + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1(\cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n) + X_2(\cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n) + X_3 \text{sen} \varphi_n + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n}{W_n} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n}{W_n} \right) + X_6(a \cdot W_n + h_n) + v_n \end{aligned} \right\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{bmatrix}}_f = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \cos \varphi_1 \text{sen} \lambda_1 & \text{sen} \varphi_1 & \frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1}{W_1} & \frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1}{W_1} & a \cdot W_1 + h_1 \\ \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 & \cos \varphi_2 \text{sen} \lambda_2 & \text{sen} \varphi_2 & \frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2}{W_2} & \frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2}{W_2} & a \cdot W_2 + h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_i \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \text{sen} \lambda_i & \text{sen} \varphi_i & \frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i}{W_i} & \frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} & a \cdot W_i + h_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_n \cos \lambda_n & \cos \varphi_n \text{sen} \lambda_n & \text{sen} \varphi_n & \frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n}{W_n} & \frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n}{W_n} & a \cdot W_n + h_n \end{bmatrix}}_A * \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix}}_{\Delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A \cdot \Delta = f}$$

5) 7 parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1(\cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1) + \dots + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1}{W_1} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1}{W_1} \right) + X_6(a.W_1 + h_1) + X_7 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}_1^2 \varphi}{W_1} \right) + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1(\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) + \dots + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2}{W_2} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2}{W_2} \right) + X_6(a.W_2 + h_2) + X_7 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}_2^2 \varphi}{W_2} \right) + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + \dots + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i}{W_i} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} \right) + X_6(a.W_i + h_i) + X_7 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}_i^2 \varphi}{W_i} \right) + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1(\cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n) + \dots + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n}{W_n} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n}{W_n} \right) + X_6(a.W_n + h_n) + X_7 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}_n^2 \varphi}{W_n} \right) + v_n \end{aligned} \right\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{bmatrix}}_f = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \dots & \dots & \frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1}{W_1} & \frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1}{W_1} & a.W_1 + h_1 & \frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}_1^2 \varphi}{W_1} \\ \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 & \dots & \dots & \frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2}{W_2} & \frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2}{W_2} & a.W_2 + h_2 & \frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}_2^2 \varphi}{W_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_i \cos \lambda_i & \dots & \dots & \frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i}{W_i} & \frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} & a.W_i + h_i & \frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}_i^2 \varphi}{W_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_n \cos \lambda_n & \dots & \dots & \frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n}{W_n} & \frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n}{W_n} & a.W_n + h_n & \frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}_n^2 \varphi}{W_n} \end{bmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix}}_{\Delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A \cdot \Delta = f}$$

La resolución de los sistemas expresados anteriormente es la siguiente:

$$A \Delta = f \Rightarrow (A^T \cdot A) \Delta = A^T \cdot f \Rightarrow (A^T \cdot A)^{-1} (A^T \cdot A) \cdot \Delta = (A^T \cdot A)^{-1} A^T \cdot b$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = (A^T A)^{-1} A^T \cdot f}$$

Una vez calculado los parámetros, obtenemos el valor de ΔN para un punto, partiendo de sus coordenadas geodésicas, con lo cual, aplicando la ecuación $H_{CDM} = H_{EGM2008} + \Delta N$, queda determinada la altura ortométrica del punto referida al sistema CDM.

4.2 Evaluación de los modelos paramétricos

A los efectos de realizar los estudios presentados anteriormente y su posterior validación, se detalla la metodología utilizada.

4.2.1 Enfoque empírico clásico

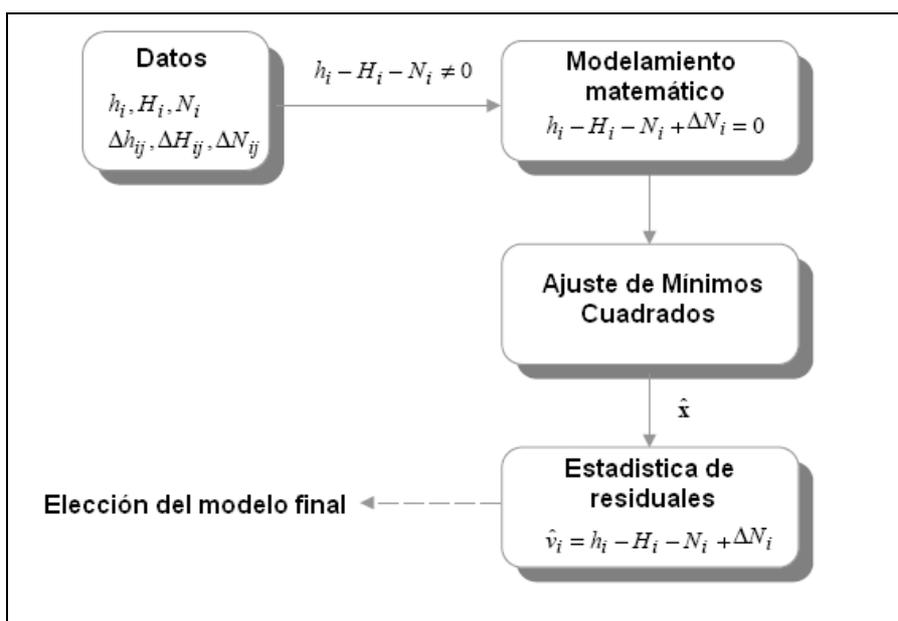
El método más común utilizado en la práctica para evaluar el rendimiento de los modelos paramétricos es calcular las estadísticas para los residuales después de realizado el ajuste de mínimos cuadrados. Los residuales para cada estación de la red, v_i , se calculan como sigue:

$$v_i = h_i - H_i - N_i + \Delta N_i$$

El modelo que da como resultado el conjunto más pequeño de residuales se considera el más apropiado ('mejor' ajuste). Se destaca la reducción en el valor promedio a cero impuesta por el ajuste de mínimos cuadrados. En efecto, estos valores dan una evaluación de la precisión del modelo como indican qué tan bien los conjuntos de datos encajan entre sí.

El estadístico que se utiliza en este enfoque es el RMS (error medio cuadrático) que se calcula como: $RMS = \sqrt{(\mu^2 + \sigma^2)}$.

Uno de los principales problemas encontrados cuando se utiliza este método empírico como el único medio para seleccionar entre diferentes modelos es que el RMS más bajo generalmente corresponde al modelo de orden más alto. De hecho, a medida que aumenta el número de parámetros en el modelo, disminuye la media cuadrática asociada (RMS). Por lo tanto, este método es válido para las pruebas de la precisión del modelo, pero no debe interpretarse como la exactitud o la capacidad de predicción del modelo.



Enfoque empírico Clásico.-

4.2.2 Validación Cruzada (Cross Validation)

Un enfoque empírico adicional que se puede utilizar para complementar el método anterior y obtener una medida más realista de la exactitud de los modelos es conocida como Validación Cruzada.

El proceso general puede resumirse en cuatro pasos:

- (i) Seleccionar un subconjunto de puntos de control en el área de interés.
- (ii) Usar los puntos seleccionados en el ajuste de mínimos cuadrados para calcular los parámetros del modelo.
- (iii) Utilizar el modelo calculado para predecir los valores residuales en nuevos puntos, no incluidos en el subconjunto original.
- (iv) Comparar los valores previstos en el paso (iii) con los puntos de altura 'conocido'.

Un problema práctico importante con el uso de este enfoque es que los resultados dependen de la exactitud de los subconjuntos de puntos utilizados para la comparación. A menudo no se conocen la exactitud de los puntos. Además, es preferible utilizar tantos datos como sea posible con el fin de calcular los parámetros desconocidos.

Para aliviar estos problemas, se adopta la siguiente simplificación con respecto a los pasos anteriores:

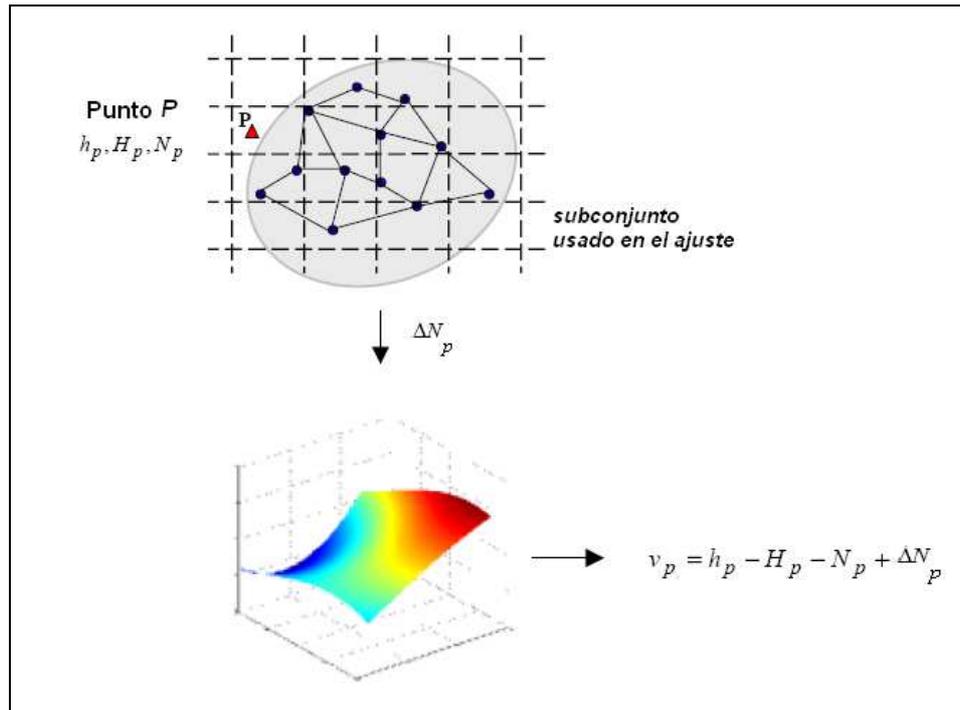
- (i) Seleccionar todos menos un punto P .
- (ii) Utilizar el subconjunto de $n-1$ puntos en el ajuste de mínimos cuadrados para calcular los parámetros del modelo.
- (iii) Aplicar el modelo calculado para predecir el valor residual del punto P .
- (iv) Comparar los valores calculados con la altura conocida del punto P .

$$v_i = h_i - H_i - N_i + \Delta N_i$$

- (v) Repetir pasos (i)-(iv) para cada punto de la red y calcular el promedio RMS:

$$RMS = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{(\mu^2 + \sigma^2)}$$

El RMS calculado de esta manera proporciona una indicación más realista de la exactitud del modelo paramétrico seleccionado y su desempeño como una superficie de predicción de un nuevo punto. Es el esquema de prueba empírico preferido, ya que no depende exclusivamente de la exactitud de un solo punto o un pequeño subconjunto de puntos. También mantiene la redundancia de datos alta para calcular los parámetros en el ajuste de mínimos cuadrados.



Validación cruzada.-

4.2.3 Evaluación de la bondad del ajuste

Una medida estadística de la bondad del modelo paramétrico apropiado para un conjunto discreto de puntos está dada por el coeficiente de determinación, denotado por R^2 . Puede ser descrito como el cociente entre la suma de los cuadrados de los residuales resultantes del ajuste y la suma de los cuadrados de la diferencia entre la observación y la media, como se ve a continuación:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \hat{l}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l}_i)^2} \Rightarrow R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l}_i)^2}$$

Donde n es el número de observaciones, v_i los residuales para cada estación de la red que se calculan utilizando $v_i = h_i - H_i - N_i + \Delta N_i$ y \bar{l}_i es el valor medio de las observaciones. En el caso extremo donde el ajuste del modelo paramétrico sea perfecto, o sea, $\sum_{i=1}^m (l_i - \hat{l}_i)^2 = 0$, entonces $R^2=1$. El otro extremo se da cuando la magnitud de los residuales es casi tan grande como la diferencia de las observaciones con respecto a la media, resultando que $R^2 \rightarrow 0$. De este modo, el coeficiente de determinación varía entre 0 y 1 ($0 \leq R^2 \leq 1$) y cuanto más se acerque al valor uno, menores serán los residuales, y por lo tanto, mejor será el ajuste.

Es importante tener en cuenta que R^2 es un estadístico y como todos los estadísticos sus valores son de alguna manera regidos por la casualidad y las características de los datos. Un ejemplo relevante a considerar, es el caso donde la redundancia de datos (o grados de libertad) es pequeña. En tales casos, es posible obtener un valor de R^2 erróneamente grande, independientemente de la calidad del ajuste. De hecho, cuando el número de parámetros del modelo aumenta, también lo hace R^2 . Para hacer frente a esta limitación, existe el coeficiente de determinación ajustado \bar{R}^2 , que es un nuevo estadístico donde intervienen los grados de libertad y se calcula de la siguiente forma:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\left[\sum_{i=1}^n (l_i - \hat{l}_i)^2 \right] / (n-u)}{\left[\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l}_i)^2 \right] / (n-1)}$$

Donde u es el número de parámetros en el modelo.

La relación entre los dos estadísticos se deriva fácilmente, resultando:

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{(n-1)}{(n-u)} (1 - R^2)$$

En general, el coeficiente de determinación ajustado también varía entre $0 \leq \bar{R}^2 \leq 1$, y se considera un buen ajuste cuando \bar{R}^2 se acerca a 1. Sin embargo, hay casos donde \bar{R}^2 puede dar un valor negativo. Se trata de un resultado confuso que puede dar lugar a interpretaciones incorrectas. Teniendo en cuenta las limitaciones de las dos medidas de bondad del ajuste, es importante no depender exclusivamente de estos valores. En su lugar, los valores se deben calcular y ser acompañados por una interpretación razonable y exámenes adicionales, tales como los procedimientos empíricos descritos en A) y B).

Dándose cuenta de que el coeficiente de determinación puede dar un valor alto o bajo, como resultado de la casualidad o peculiaridades de los datos, el usuario debe ser más crítico de su resultado. Por ejemplo, otro efecto común encontrado en la práctica es el resultado de un R^2 bajo debido al hecho de que no hubo suficiente variación en las observaciones para justificar un ajuste “bueno” o “malo”. Por lo tanto, estas medidas estadísticas pueden ser una herramienta poderosa en señalar modelos inadecuados en lugar de establecer la bondad del ajuste.

4.3 Cálculos y Resultados

Para este análisis y procesamiento, contamos con una muestra de datos, que corresponden a los 30 puntos que conforman el Marco de Referencia Geodésico de Montevideo MRGMVD 2004.

Los testeos empírico clásico, validación cruzada y la evaluación de la bondad de los ajustes se aplicarán utilizando dos modelos geoidales: EGM 2008 y GEOUR06.

Pto.	h	H _{CDM}	NEGM 2008	HEGM 2008	NCDM	$\Delta N = \text{NEGM 2008} - \text{NCDM}$
A0001	52.3363	37.160	14.8515	37.4848	15.1763	-0.325
A0002	31.7382	16.617	14.8403	16.8979	15.1212	-0.281
A0003	47.7954	32.738	14.7711	33.0243	15.0574	-0.286
C0004	26.4600	11.569	14.6444	11.8156	14.8910	-0.247
C0005	38.6214	23.707	14.587	24.0344	14.9144	-0.327
A0006	18.9629	4.050	14.5755	4.3874	14.9129	-0.337
A0007	32.8829	17.885	14.6969	18.1860	14.9979	-0.301
A0008	32.2966	17.179	14.7815	17.5151	15.1176	-0.336
C0009	18.8151	3.670	14.8691	3.9460	15.1451	-0.276
B0010	64.7105	49.663	14.7594	49.9511	15.0475	-0.288
A0011	37.3624	22.455	14.5654	22.7970	14.9074	-0.342
C0012	55.9711	40.963	14.6461	41.3250	15.0081	-0.362
A0013	44.5407	29.588	14.6214	29.9193	14.9527	-0.331
A0014	58.0394	43.022	14.7264	43.3130	15.0174	-0.291
C0015	63.8220	48.891	14.6645	49.1575	14.9310	-0.267
B0016	96.4532	81.379	14.6797	81.7735	15.0742	-0.394
B0017	82.8360	67.878	14.6433	68.1927	14.9580	-0.315
A0018	58.1587	43.284	14.6135	43.5452	14.8747	-0.261
A0019	48.6207	33.869	14.4908	34.1299	14.7517	-0.261
C0020	60.6165	45.652	14.5696	46.0469	14.9645	-0.395
A0021	42.8772	28.134	14.4013	28.4759	14.7432	-0.342
A0022	72.9047	58.151	14.4613	58.4434	14.7537	-0.292
A0023	21.3320	6.794	14.2575	7.0745	14.5380	-0.281
B0024	26.7077	12.045	14.3356	12.3721	14.6627	-0.327
A0025	45.1736	30.468	14.3758	30.7978	14.7056	-0.330
A0026	33.3955	18.591	14.4929	18.9026	14.8045	-0.312
A0027	25.1835	10.472	14.4257	10.7578	14.7115	-0.286
A0028	26.3144	11.161	14.8329	11.4815	15.1534	-0.320
A0029	43.8323	28.692	14.8478	28.9845	15.1403	-0.292
FI	71.9360	57.241	14.3102	57.6258	14.6950	-0.385

Tabla de cálculo de ΔN . Modelo Geoidal EGM 2008 (en metros).-

Pto.	h	H _{CDM}	NGEOUR06	HGEOUR06	NCDM	$\Delta N = N_{\text{GEOUR06}} - N_{\text{CDM}}$
A0001	52.3363	37.160	14.809	37.5273	15.1763	-0.367
A0002	31.7382	16.617	14.851	16.8872	15.1212	-0.270
A0003	47.7954	32.738	14.704	33.0914	15.0574	-0.353
C0004	26.4600	11.569	14.525	11.9350	14.8910	-0.366
C0005	38.6214	23.707	14.611	24.0104	14.9144	-0.303
A0006	18.9629	4.050	14.671	4.2919	14.9129	-0.242
A0007	32.8829	17.885	14.771	18.1119	14.9979	-0.227
A0008	32.2966	17.179	14.837	17.4596	15.1176	-0.281
C0009	18.8151	3.670	14.923	3.8921	15.1451	-0.222
B0010	64.7105	49.663	14.942	49.7685	15.0475	-0.105
A0011	37.3624	22.455	14.800	22.5624	14.9074	-0.107
C0012	55.9711	40.963	14.818	41.1531	15.0081	-0.190
A0013	44.5407	29.588	14.906	29.6347	14.9527	-0.047
A0014	58.0394	43.022	14.962	43.0774	15.0174	-0.055
C0015	63.8220	48.891	14.978	48.8440	14.9310	0.047
B0016	96.4532	81.379	15.052	81.4012	15.0742	-0.022
B0017	82.8360	67.878	15.080	67.7560	14.9580	0.122
A0018	58.1587	43.284	14.990	43.1687	14.8747	0.115
A0019	48.6207	33.869	14.921	33.6997	14.7517	0.169
C0020	60.6165	45.652	14.874	45.7425	14.9645	-0.091
A0021	42.8772	28.134	14.755	28.1222	14.7432	0.012
A0022	72.9047	58.151	14.731	58.1737	14.7537	-0.023
A0023	21.3320	6.794	14.556	6.7760	14.5380	0.018
B0024	26.7077	12.045	14.570	12.1377	14.6627	-0.093
A0025	45.1736	30.468	14.535	30.6386	14.7056	-0.171
A0026	33.3955	18.591	14.647	18.7485	14.8045	-0.157
A0027	25.1835	10.472	14.504	10.6795	14.7115	-0.208
A0028	26.3144	11.161	15.039	11.2754	15.1534	-0.114
A0029	43.8323	28.692	15.009	28.8233	15.1403	-0.131
FI	71.9360	57.241	14.459	57.4770	14.6950	-0.236

Tabla de cálculo de ΔN . Modelo Geoidal GEOUR (en metros).-

También se obtuvo los valores de N a partir del Sistema de Interpolación UruGeoide-2007, el cual es un ejecutable que calcula por interpolación lineal las ondulaciones geoidales a partir de un archivo con el modelo geoidal y coordenadas, entradas por teclado o archivo de puntos. El resultado de la aplicación del mismo es el siguiente:

Pto.	NURUGEOIDE	Pto.	NURUGEOIDE
A0001	15.07	B0016	15.01
A0002	15.07	B0017	14.98
A0003	15.03	A0018	14.94
C0004	14.92	A0019	14.84
C0005	14.93	C0020	14.93
A0006	14.93	A0021	14.75
A0007	15.01	A0022	14.84
A0008	15.05	A0023	14.58
C0009	15.10	B0024	14.68
B0010	15.06	A0025	14.74
A0011	14.95	A0026	14.87
C0012	15.00	A0027	14.77
A0013	14.97	A0028	15.11
A0014	15.03	A0029	15.10
C0015	14.99	FI	14.70

Ondulaciones obtenidas a partir del URUGEOIDE 2007 (en metros).-

ESTUDIO DE UN SISTEMA DE REFERENCIA GEODÉSICO EN EL DEPARTAMENTO DE MONTEVIDEO

Pto.	NURUGEOIDE	h	H CDM	H URU	NCDM	ΔN
A0001	15.07	52.3363	37.160	37.266	15.176	0.106
A0002	15.07	31.7382	16.617	16.668	15.121	0.051
A0003	15.03	47.7954	32.738	32.765	15.057	0.027
C0004	14.92	26.4600	11.569	11.540	14.891	-0.029
C0005	14.93	38.6214	23.707	23.691	14.914	-0.016
A0006	14.93	18.9629	4.050	4.033	14.913	-0.017
A0007	15.01	32.8829	17.885	17.873	14.998	-0.012
A0008	15.05	32.2966	17.179	17.247	15.118	0.068
C0009	15.10	18.8151	3.670	3.715	15.145	0.045
B0010	15.06	64.7105	49.663	49.651	15.048	-0.013
A0011	14.95	37.3624	22.455	22.412	14.907	-0.043
C0012	15.00	55.9711	40.963	40.971	15.008	0.008
A0013	14.97	44.5407	29.588	29.571	14.953	-0.017
A0014	15.03	58.0394	43.022	43.009	15.017	-0.013
C0015	14.99	63.8220	48.891	48.832	14.931	-0.059
B0016	15.01	96.4532	81.379	81.443	15.074	0.064
B0017	14.98	82.8360	67.878	67.856	14.958	-0.022
A0018	14.94	58.1587	43.284	43.219	14.875	-0.065
A0019	14.84	48.6207	33.869	33.781	14.752	-0.088
C0020	14.93	60.6165	45.652	45.687	14.965	0.035
A0021	14.75	42.8772	28.134	28.127	14.743	-0.007
A0022	14.84	72.9047	58.151	58.065	14.754	-0.086
A0023	14.58	21.3320	6.794	6.752	14.538	-0.042
B0024	14.68	26.7077	12.045	12.028	14.663	-0.017
A0025	14.74	45.1736	30.468	30.434	14.706	-0.034
A0026	14.87	33.3955	18.591	18.526	14.805	-0.066
A0027	14.77	25.1835	10.472	10.414	14.712	-0.059
A0028	15.11	26.3144	11.161	11.204	15.153	0.043
A0029	15.10	43.8323	28.692	28.732	15.140	0.040
FI	14.70	71.9360	57.241	57.236	14.695	-0.005

Tabla de cálculo de ΔN . URUGEOIDE 2007 (en metros).-

Punto	ΔN_{EGM08}	ΔN_{Geour}	$\Delta N_{Urugeoide}$
A0001	0.325	0.367	0.106
A0002	0.281	0.270	0.051
A0003	0.286	0.353	0.027
C0004	0.247	0.366	-0.029
C0005	0.327	0.303	-0.016
A0006	0.337	0.242	-0.017
A0007	0.301	0.227	-0.012
A0008	0.336	0.281	0.068
C0009	0.276	0.222	0.045
B0010	0.288	0.105	-0.013
A0011	0.342	0.107	-0.043
C0012	0.362	0.190	0.008
A0013	0.331	0.047	-0.017
A0014	0.291	0.055	-0.013
C0015	0.267	-0.047	-0.059
B0016	0.394	0.022	0.064
B0017	0.315	-0.122	-0.022
A0018	0.261	-0.115	-0.065
A0019	0.261	-0.169	-0.088
C0020	0.395	0.091	0.035
A0021	0.342	-0.012	-0.007
A0022	0.292	0.023	-0.086
A0023	0.281	-0.018	-0.042
B0024	0.327	0.093	-0.017
A0025	0.330	0.171	-0.034
A0026	0.312	0.157	-0.066
A0027	0.286	0.208	-0.059
A0028	0.320	0.114	0.043
A0029	0.292	0.131	0.040
FI	0.385	0.236	-0.005
Promedio	0.313	0.130	-0.007
Desv. Est	0.039	0.146	0.048
RMS	0.315	0.195	0.049

ΔN calculado para los distintos modelos geoidales (en metros).-

Los valores de ΔN a partir del Sistema de Interpolación UruGeoide-2007, no pueden ser modelados, dado que el UruGeoide- 2007 arroja como resultado valores de la ondulación del geoides ya tratados. Debido a esto, el único estudio que se pudo realizar fue el cálculo del promedio, desviación estándar y RMS de los ΔN calculados a partir de las ondulaciones adquiridas del UruGeoide-2007.

De la misma forma, se calcularon estos estadísticos para los modelos geoidales EGM2008 y GEOUR06, previo a cualquier tipo de ajuste.

En los resultados vemos que el que arroja mejores estadísticos es el UruGeoide-2007 ya que el promedio se aproxima a cero, la desviación estándar es aproximadamente de 5 cm y el RMS es muy bajo. Esto confirma el hecho de que estos datos ya se encuentran ajustados.

Otra consideración a resaltar es que el RMS calculado para el GEOUR06 es menor al calculado para el EGM2008, esto es de esperar ya que el GEOUR06 fue realizado utilizando datos del territorio uruguayo, mientras que el EGM2008 es un modelo geoidal global.

Por último, también se observa que la desviación estándar de la muestra para el EGM2008 es aproximadamente de 5 cm y de 15 cm aproximadamente para el GEOUR06, siendo esta tres veces mayor que la primera.

4.3.1 Modelo Geoidal EGM 2008

A) Enfoque empírico clásico

Aplicando dicho enfoque, el cual fue descrito anteriormente, se muestra en la tabla a continuación, los residuales resultantes de los ajustes por Mínimos Cuadrados, aplicando los siguientes modelos de funciones paramétricas: Trigonométrica Clásica de 4 y 5 parámetros y Transformación de Similitud Diferencial 5, 6 y 7 parámetros.

ENFOQUE EMPÍRICO CLÁSICO - RESIDUALES (metros)					
Pto.	TC	TC	TSD	TSD	TSD
	4 parámetros	5 parámetros	5 parámetros	6 parámetros	7 parámetros
A0001	0.044	0.050	0.033	0.010	0.030
A0002	-0.014	-0.010	-0.024	-0.023	-0.012
A0003	-0.014	-0.010	-0.012	-0.023	-0.015
C0004	-0.060	-0.064	-0.045	-0.024	-0.028
C0005	0.006	0.005	0.017	0.021	0.014
A0006	0.012	0.012	0.020	0.045	0.038
A0007	-0.021	-0.017	-0.015	-0.007	-0.009
A0008	0.025	0.029	0.024	0.030	0.032
C0009	-0.018	-0.016	-0.032	-0.017	-0.010
B0010	-0.031	-0.030	-0.029	-0.049	-0.053
A0011	0.014	0.018	0.017	0.025	0.023
C0012	0.034	0.038	0.040	0.027	0.024
A0013	0.007	0.010	0.011	0.022	0.021
A0014	-0.030	-0.031	-0.025	-0.030	-0.036
C0015	-0.054	-0.054	-0.047	-0.048	-0.052
B0016	0.082	0.075	0.092	0.064	0.054
B0017	0.007	-0.001	0.020	0.017	0.009
A0018	-0.054	-0.054	-0.048	-0.037	-0.036
A0019	-0.045	-0.040	-0.049	-0.031	-0.015
C0020	0.071	0.076	0.073	0.064	0.067
A0021	0.030	0.036	0.017	0.020	0.034
A0022	-0.031	-0.027	-0.034	-0.069	-0.065
A0023	-0.023	-0.020	-0.047	-0.035	-0.020
B0024	0.012	0.012	0.000	0.009	0.012
A0025	0.011	0.006	0.010	0.001	-0.006
A0026	-0.014	-0.014	-0.009	-0.002	-0.008
A0027	-0.033	-0.041	-0.025	-0.008	-0.021
A0028	0.026	0.017	0.015	0.035	0.026
A0029	-0.010	-0.014	-0.018	-0.018	-0.023
FI	0.069	0.059	0.071	0.033	0.022

Nota: TC: Trigonométrica Clásica, TSD: Transformación de Similitud Diferencial

Tabla de residuales para las distintas funciones a partir del Enfoque Empírico Clásico.-

Con estos residuales, se calculó para cada función paramétrica, su correspondiente error medio cuadrático RMS.

Modelo	Mín.	Máx.	μ	σ	RMS
Trigonométrica Clásica 4 param	-0.060	0.082	0.000	0.037	0.037
Trigonométrica Clásica 5 param	-0.064	0.076	0.000	0.037	0.037
TSD 5 parámetros	-0.049	0.092	0.000	0.038	0.038
TSD 6 parámetros	-0.069	0.064	0.000	0.034	0.034
TSD 7 parámetros	-0.065	0.067	0.000	0.032	0.032

Estadísticos para el Enfoque Empírico Clásico (en metros).-

Como se observa en la tabla anterior, la función paramétrica que arroja el mejor resultado es la TSD de 7 parámetros, con un RMS de 3.2 cm.

Esto concuerda con lo que se había mencionado anteriormente, que cuando se utiliza este método empírico como el único medio para seleccionar entre diferentes modelos, el RMS más bajo, generalmente corresponde al modelo de orden más alto.

Cabe destacar, que este enfoque nos indica el orden de precisión de cada modelo, pero esto no debe interpretarse como la exactitud o la capacidad de predicción del mismo.

B) Validación Cruzada (Cross Validation)

Luego aplicamos la validación cruzada, como otra prueba para poder determinar el mejor ajuste.

En la siguiente tabla, se describen los residuales obtenidos para cada función paramétrica.

VALIDACIÓN CRUZADA - RESIDUALES (metros)					
Pto.	TC	TC	TSD	TSD	TSD
	4 parámetros	5 parámetros	5 parámetros	6 parámetros	7 parámetros
A0001	0.066	0.080	0.043	0.014	0.061
A0002	-0.017	-0.012	-0.027	-0.026	-0.015
A0003	-0.016	-0.012	-0.014	-0.029	-0.019
C0004	-0.070	-0.076	-0.068	-0.040	-0.047
C0005	0.007	0.005	0.019	0.024	0.017
A0006	0.013	0.014	0.022	0.054	0.047
A0007	-0.023	-0.020	-0.017	-0.007	-0.010
A0008	0.027	0.032	0.026	0.033	0.036
C0009	-0.021	-0.018	-0.039	-0.022	-0.013
B0010	-0.034	-0.033	-0.033	-0.059	-0.064
A0011	0.015	0.020	0.019	0.028	0.027
C0012	0.039	0.044	0.046	0.031	0.028
A0013	0.007	0.011	0.012	0.025	0.024
A0014	-0.034	-0.034	-0.028	-0.033	-0.040
C0015	-0.060	-0.059	-0.052	-0.054	-0.058
B0016	0.094	0.093	0.111	0.088	0.079
B0017	0.008	-0.001	0.030	0.027	0.015
A0018	-0.061	-0.060	-0.057	-0.045	-0.043
A0019	-0.058	-0.054	-0.062	-0.042	-0.024
C0020	0.077	0.085	0.081	0.072	0.076
A0021	0.034	0.045	0.019	0.022	0.044
A0022	-0.033	-0.030	-0.038	-0.093	-0.087
A0023	-0.033	-0.030	-0.067	-0.051	-0.034
B0024	0.014	0.014	0.000	0.011	0.015
A0025	0.012	0.007	0.012	0.001	-0.008
A0026	-0.015	-0.016	-0.010	-0.002	-0.009
A0027	-0.038	-0.053	-0.030	-0.010	-0.029
A0028	0.032	0.025	0.024	0.064	0.051
A0029	-0.011	-0.017	-0.022	-0.022	-0.030
FI	0.080	0.083	0.091	0.055	0.041

Tabla de residuales para las distintas funciones a partir de la Validación Cruzada.-

En esta oportunidad, también se calcularon los estadísticos μ , σ y RMS.

Modelo	Mín.	Máx.	μ	σ	RMS
Trigonométrica Clásica 4 param	-0.070	0.094	0.000	0.037	0.037
Trigonométrica Clásica 5 param	-0.076	0.093	0.000	0.037	0.037
TSD 5 parámetros	-0.068	0.111	0.000	0.037	0.037
TSD 6 parámetros	-0.093	0.088	0.000	0.034	0.034
TSD 7 parámetros	-0.087	0.079	0.000	0.032	0.032

Estadísticos para la Validación Cruzada (en metros).-

El RMS calculado a partir de la metodología de la Validación Cruzada, puede ser interpretado para evaluar la exactitud en la selección de la función paramétrica.

De igual forma que en el Enfoque Empírico Clásico, vemos que la función paramétrica que muestra un mejor desempeño es la TSD de 7 parámetros.

Modelo	RMS (cm)	
	Enfoque empírico Clásico	Validación Cruzada
Trigonométrica Clásica 4 param	3.7	3.7
Trigonométrica Clásica 5 param	3.7	3.7
TSD 5 parámetros	3.8	3.7
TSD 6 parámetros	3.4	3.4
TSD 7 parámetros	3.2	3.2

RMS para Enfoque empírico Clásico y Validación Cruzada.-

Por el enfoque empírico clásico y la validación cruzada obtuvimos 2 valores de RMS para cada modelo. En la tabla vemos que en la mayoría de los casos el RMS se mantuvo igual para ambas pruebas.

En el enfoque clásico la diferencia entre el RMS más alto y el más bajo es de 0.6 cm, mientras que en la validación cruzada es de 0.5 cm. Igualmente, siendo mínima la diferencia entre las dos pruebas, podemos señalar que el RMS calculado por la validación cruzada es levemente más estable y no indica diferencias significativas entre las funciones paramétricas.

A pesar de que la diferencia entre los RMS, para los distintos modelos, no sea tan amplia, se destaca que la función paramétrica que presenta un mejor comportamiento es la transformación de similitud diferencial de 7 parámetros, con un RMS de 3.2 cm tanto para el enfoque clásico como para la validación cruzada.

C) Evaluación de la Bondad del Ajuste

El coeficiente de determinación R^2 se puede ver como la medida del grado de fiabilidad o bondad del ajuste del modelo, para un conjunto de datos.

Cuando realizamos el cálculo de dicho coeficiente, nos encontramos con valores negativos del mismo para todos los modelos, cosa que nos sorprendió dado que ya fue expuesto que R^2 varía entre 0 y 1.

Esto nos hizo profundizar en los motivos del por qué de este suceso.

Lo primero que efectuamos fue calcularlo para el modelo geoidal GEOUR06, en el cual nos dieron valores aceptables. Esto nos llevó a realizar un análisis más detenido en la estructura de datos de la muestra obtenida aplicando el EGM2008.

Dado como se calcula el coeficiente de determinación:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \hat{l}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l}_i)^2}$$

vemos que lo que sucede es que la sumatoria de los cuadrados de los residuales es mayor que el cuadrado de la diferencia de la observación con respecto a su media, esto se debe a la poca variabilidad que existe entre las observaciones l_i en torno a su media \bar{l}_i , dando como resultado un valor de R^2 negativo.

Investigando más sobre el tema, encontramos que está contemplada esta situación, y ello da lugar a una definición alternativa de R^2 que evita que dicho coeficiente sea negativo.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (l_i - \hat{l}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (l_i)^2}$$

Esta nueva definición de R^2 , sustituye la diferencia entre la observación y la media ($l_i - \bar{l}_i$) por la observación l_i . Lo que ocurre es que se utiliza la diferencia de las observaciones respecto al origen en lugar de respecto a su media.

Una vez resuelto este inconveniente, se procedió a recalculer el coeficiente de determinación para los distintos modelos aplicados, los cuales se muestran en la siguiente tabla:

	Modelo	R^2	\bar{R}^2
A	Trigonométrica Clásica 4 param	0.982	0.980
B	Trigonométrica Clásica 5 param	0.980	0.977
C	TSD 5 parámetros	0.979	0.976
D	TSD 6 parámetros	0.982	0.978
E	TSD 7 parámetros	0.982	0.977

Valores de coeficiente de determinación y coeficiente de determinación ajustado.-

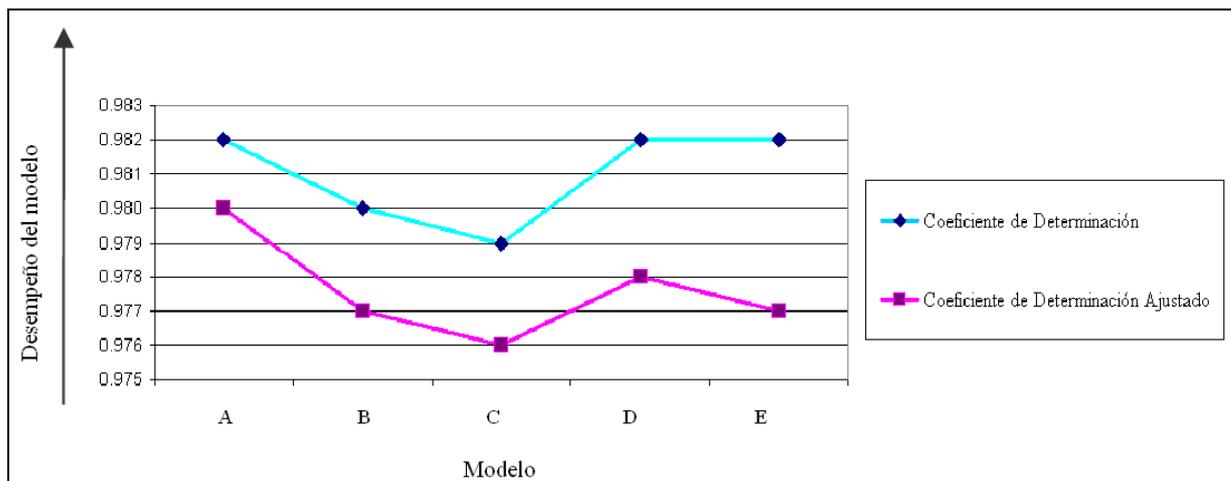


Gráfico del comportamiento de los coeficientes de determinación simple y ajustado.-

Lo que se observa, es que para los distintos modelos los resultados de los estadísticos R^2 y \bar{R}^2 arrojaron valores prácticamente iguales, con una diferencia máxima entre los distintos modelos de 0.003 y 0.004 respectivamente para cada estadístico. Al ser estos valores tan semejantes para los distintos modelos, no nos permite determinar una solución única, sino que todos los modelos tienen un comportamiento aceptable.

➤ *Elección del mejor ajuste utilizando el modelo geoidal EGM2008*

Evaluando los resultados que volcaron los distintos testeos: empírico clásico, validación cruzada y evaluación de la bondad del ajuste, sacamos las siguientes conclusiones.

Como ya expusimos, a partir de los dos primeros testeos, el modelo que muestra el mejor rendimiento es la transformación de similitud diferencial de 7 parámetros con un RMS de 3.2 cm. Otro dato a tener en cuenta, es que la diferencia entre los residuales máximo y mínimo, está entre los más chicos con aproximadamente 16.5 cm.

Modelo	Mín.	Máx.	Máx-Mín	RMS
Trigonométrica Clásica 4 param	-0.070	0.094	0.164	0.037
Trigonométrica Clásica 5 param	-0.076	0.093	0.170	0.037
TSD 5 parámetros	-0.068	0.111	0.179	0.037
TSD 6 parámetros	-0.093	0.088	0.180	0.034
TSD 7 parámetros	-0.087	0.079	0.166	0.032

(*) Todos los valores se encuentran en metros.-

En la evaluación de la bondad del ajuste todos los modelos son aceptables y se encuentran dentro de un pequeño entorno.

Con la información recabada, podemos concluir que la función paramétrica que da un mejor ajuste para el EGM2008 es la transformación de similitud diferencial de 7 parámetros.

Transformación de Similitud Diferencial 7 param.	
R^2	0.982
\overline{R}^2	0.977
RMS (Clásico)	3.2 cm
RMS (Valid. Cruz.)	3.2 cm

Tabla de estadísticos del modelo óptimo seleccionado.-

4.3.2 Modelo Geoidal GEOUR06

A) Enfoque empírico clásico

Vemos a continuación los residuales resultantes de los ajustes por Mínimos Cuadrados, aplicando los siguientes modelos de funciones paramétricas: Trigonometría Clásica de 4 y 5 parámetros y Transformación de Similitud Diferencial 5, 6 y 7 parámetros.

ENFOQUE EMPIRICO CLASICO - RESIDUALES (metros)					
Pto.	TC	TC	TSD	TSD	TSD
	4 parámetros	5 parámetros	5 parámetros	6 parámetros	7 parámetros
A0001	0.012	0.013	-0.008	-0.018	0.003
A0002	-0.023	-0.022	-0.033	-0.033	-0.022
A0003	0.011	0.012	0.003	-0.002	0.007
C0004	-0.001	-0.001	0.002	0.011	0.007
C0005	0.023	0.023	0.030	0.031	0.024
A0006	0.009	0.010	0.016	0.026	0.019
A0007	-0.011	-0.010	-0.008	-0.004	-0.007
A0008	0.029	0.030	0.027	0.030	0.032
C0009	-0.020	-0.020	-0.028	-0.022	-0.015
B0010	-0.036	-0.036	-0.031	-0.039	-0.043
A0011	-0.009	-0.008	-0.007	-0.003	-0.005
C0012	0.026	0.027	0.030	0.025	0.022
A0013	0.015	0.015	0.016	0.020	0.020
A0014	-0.015	-0.015	-0.009	-0.011	-0.017
C0015	-0.036	-0.036	-0.033	-0.033	-0.037
B0016	0.070	0.069	0.079	0.068	0.058
B0017	-0.008	-0.009	-0.001	-0.002	-0.010
A0018	-0.040	-0.040	-0.041	-0.037	-0.036
A0019	-0.029	-0.028	-0.045	-0.038	-0.022
C0020	0.073	0.074	0.071	0.067	0.070
A0021	0.030	0.031	0.016	0.017	0.031
A0022	-0.049	-0.049	-0.052	-0.066	-0.062
A0023	0.000	0.001	-0.015	-0.010	0.005
B0024	0.020	0.020	0.016	0.019	0.023
A0025	-0.004	-0.005	0.003	-0.001	-0.008
A0026	-0.032	-0.032	-0.026	-0.023	-0.029
A0027	-0.040	-0.041	-0.028	-0.021	-0.034
A0028	0.008	0.006	0.015	0.023	0.014
A0029	-0.001	-0.002	0.004	0.004	-0.001
FI	0.027	0.025	0.038	0.022	0.011

Nota: TC: Trigonométrica Clásica, TSD: Transformación de Similitud Diferencial

Tabla de residuales para las distintas funciones a partir del Enfoque Empírico Clásico.-

Con estos residuales, se calculó para cada función paramétrica, su correspondiente error medio cuadrático RMS.

Modelo	Mín.	Máx.	μ	σ	RMS
Trigonométrica Clásica 4 param	-0.049	0.073	0.000	0.030	0.030
Trigonométrica Clásica 5 param	-0.049	0.074	0.000	0.030	0.030
TSD 5 parámetros	-0.052	0.079	0.000	0.032	0.032
TSD 6 parámetros	-0.066	0.068	0.000	0.031	0.031
TSD 7 parámetros	-0.062	0.070	0.000	0.030	0.030

Estadísticos para el Enfoque Empírico Clásico (en metros).-

Como vemos, en este caso, hay 3 funciones paramétricas que tienen el menor e igual RMS de 3.0 cm que son: la trigonométrica clásica de 4 y 5 parámetros y la transformación de similitud diferencial de 7 parámetros.

B) Validación Cruzada (Cross Validation)

Nuevamente aplicamos la validación cruzada, como otra prueba para poder determinar el mejor ajuste.

En la siguiente tabla, se describen los residuales obtenidos para cada función paramétrica.

VALIDACIÓN CRUZADA - RESIDUALES (metros)					
Pto.	TC 4 parámetros	TC 5 parámetros	TSD 5 parámetros	TSD 6 parámetros	TSD 7 parámetros
A0001	0.017	0.020	-0.011	-0.026	0.005
A0002	-0.027	-0.026	-0.038	-0.038	-0.027
A0003	0.013	0.014	0.004	-0.002	0.009
C0004	-0.001	-0.001	0.004	0.019	0.012
C0005	0.026	0.025	0.033	0.035	0.028
A0006	0.011	0.011	0.017	0.031	0.024
A0007	-0.012	-0.011	-0.009	-0.005	-0.007
A0008	0.032	0.033	0.031	0.034	0.036
C0009	-0.024	-0.023	-0.034	-0.027	-0.019
B0010	-0.040	-0.039	-0.034	-0.046	-0.051
A0011	-0.009	-0.009	-0.008	-0.004	-0.006
C0012	0.030	0.031	0.035	0.029	0.026
A0013	0.016	0.017	0.018	0.023	0.022
A0014	-0.017	-0.017	-0.010	-0.012	-0.019
C0015	-0.040	-0.040	-0.036	-0.037	-0.041
B0016	0.080	0.022	0.096	0.093	0.085
B0017	-0.010	-0.013	-0.002	-0.003	-0.016
A0018	-0.045	-0.045	-0.049	-0.045	-0.043
A0019	-0.038	-0.038	-0.058	-0.051	-0.035
C0020	0.079	0.083	0.079	0.076	0.080
A0021	0.035	0.039	0.018	0.019	0.040
A0022	-0.053	-0.054	-0.058	-0.089	-0.084
A0023	0.001	0.001	-0.022	-0.015	0.008
B0024	0.023	0.023	0.019	0.024	0.028
A0025	-0.005	-0.006	0.003	-0.001	-0.010
A0026	-0.035	-0.035	-0.028	-0.025	-0.032
A0027	-0.045	-0.053	-0.033	-0.026	-0.047
A0028	0.009	0.008	0.024	0.042	0.028
A0029	-0.001	-0.002	0.005	0.006	-0.002
FI	0.031	0.035	0.048	0.037	0.020

Tabla de residuales para las distintas funciones a partir de la Validación Cruzada.-

En esta oportunidad, también se calcularon los estadísticos μ , σ y RMS.

Modelo	Mín.	Máx.	μ	σ	RMS
Trigonométrica Clásica 4 param	-0.053	0.080	0.000	0.030	0.030
Trigonométrica Clásica 5 param	-0.054	0.083	0.000	0.030	0.030
TSD 5 parámetros	-0.058	0.096	0.000	0.031	0.031
TSD 6 parámetros	-0.089	0.093	0.000	0.031	0.031
TSD 7 parámetros	-0.084	0.085	0.000	0.029	0.029

Estadísticos para la Validación Cruzada (en metros).-

Podemos ver que la función paramétrica que muestra un mejor desempeño es la TSD de 7 parámetros con un RMS de 2.9 cm. Este estadístico calculado a partir de la metodología de la Validación Cruzada, se interpreta para evaluar la exactitud en la selección de la función paramétrica.

Modelo	RMS (cm)	
	Enfoque empírico Clásico	Validación Cruzada
Trigonométrica Clásica 4 param	3.0	3.0
Trigonométrica Clásica 5 param	3.0	3.0
TSD 5 parámetros	3.2	3.1
TSD 6 parámetros	3.1	3.1
TSD 7 parámetros	3.0	2.9

RMS para Enfoque empírico Clásico y Validación Cruzada.-

Como nos muestra la tabla anterior, la mayoría de los RMS se mantuvieron para ambas pruebas.

Tanto en el enfoque clásico como en la validación cruzada, la diferencia entre el RMS más alto y el más bajo es de 0.2 cm.

Dado que los resultados son semejantes, es necesario nuevamente, profundizar en el estudio para poder elegir de forma definitiva una función paramétrica.

C) Evaluación de la Bondad del Ajuste

Otra medida que contribuye en la elección de la mejor función paramétrica es la bondad del ajuste. Está expresada en el coeficiente de determinación R^2 y el coeficiente de determinación ajustado \bar{R}^2 .

	Modelo	R^2	\bar{R}^2
A	Trigonométrica Clásica 4 param	0.949	0.943
B	Trigonométrica Clásica 5 param	0.955	0.947
C	TSD 5 parámetros	0.939	0.930
D	TSD 6 parámetros	0.933	0.919
E	TSD 7 parámetros	0.938	0.922

Valores de coeficiente de determinación y coeficiente de determinación ajustado.-

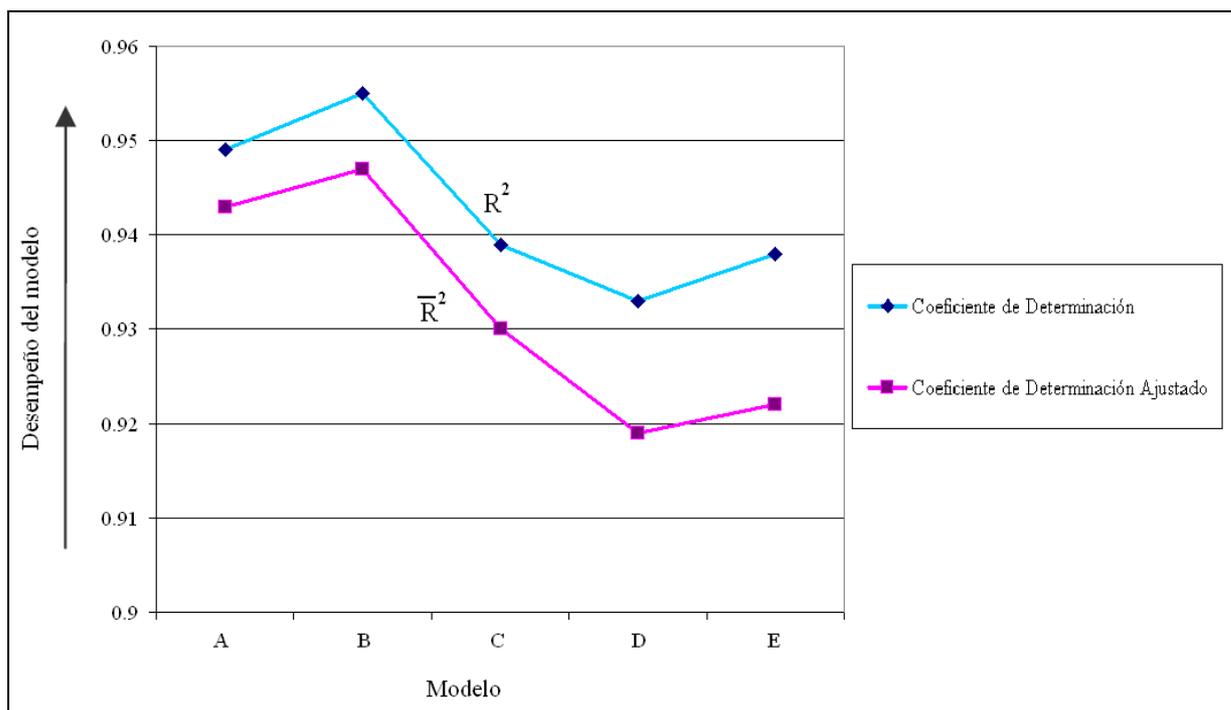


Gráfico del comportamiento de los coeficientes de determinación simple y ajustado.-

En el gráfico anterior se muestran los valores de la bondad de los ajustes.

Un comentario a resaltar, es que teóricamente los coeficientes de determinación simple y ajustado, deberían ir en aumento a medida que se incrementan el número de parámetros en el modelo, lo que no ocurre principalmente en el paso de B a C. También vemos, que en nuestro caso, las funciones trigonométricas clásicas tienen un mejor desempeño en el ajuste que las funciones de transformación de similitud diferencial, indiferentemente del número de parámetros.

Podemos ver que el rango de diferencias de R^2 y \bar{R}^2 entre los distintos modelos es relativamente pequeño, ya que va de 0.933 a 0.955 y de 0.919 a 0.945, respectivamente.

El modelo trigonométrico clásico de 5 parámetros tiene el mayor valor en ambos estadísticos, por lo que es el modelo que muestra la mejor bondad de ajuste.

➤ *Elección del mejor ajuste utilizando el modelo geoidal GEOUR06*

Una vez realizados todos los testeos y analizando en conjunto toda la información, vemos que en un principio, indicamos que para la validación cruzada no podíamos emitir una primera opinión del mejor modelo por la cercanía que existe entre los valores del RMS de las distintas funciones. Pero deteniéndonos en otros valores, como lo son las magnitudes mínima y máxima de los residuales, notamos que en el intervalo entre dichas magnitudes existe una diferencia significativa para los distintos modelos. Esto se manifiesta en la siguiente tabla:

Modelo	Mín.	Máx.	Máx-Mín	RMS
Trigonométrica Clásica 4 param	-5.3	8.0	13.3	3.0
Trigonométrica Clásica 5 param	-5.4	8.3	13.6	3.0
TSD 5 parámetros	-5.8	9.6	15.4	3.1
TSD 6 parámetros	-8.9	9.3	18.2	3.1
TSD 7 parámetros	-8.4	8.5	16.8	2.9

(*) Todos los valores se encuentran en cm.-

Vemos que para las funciones trigonométricas clásicas, el intervalo Máx-Mín está en un entorno de 13.5 cm, mientras que el intervalo de las funciones de transformación de similitud diferencial van de los 15 a los 18 cm.

Tomando en cuenta esto último y el resultado de la bondad del ajuste, podemos concluir, que si aplicamos el **GEOUR06**, el modelo de ajuste óptimo es la función Trigonométrica Clásica de 5 parámetros.

Trigonométrica Clásica 5 param.	
R^2	0.955
\overline{R}^2	0.947
RMS (Clásico)	3.0 cm
RMS (Valid. Cruz.)	3.0 cm

Tabla de estadísticos del modelo óptimo seleccionado.-

5. CONCLUSIONES FINALES

El principal objetivo de este trabajo era encontrar la relación óptima entre las alturas elipsoidales, ortométricas y geoidales. Para obtener las alturas geoidales utilizamos dos modelos, EGM2008 y GEOUR06, por lo cual se trabajó con dos series de datos.

Para poder efectuar este estudio, fue necesario recabar un conjunto de datos que implicó realizar relevamiento GPS y determinar las cotas oficiales de la red geodésica MRGMVD 2004.

Las discrepancias entre las alturas mencionadas, fueron modeladas a partir de funciones paramétricas: trigonométricas clásicas de 4 y 5 parámetros y transformaciones de similitud diferencial de 5, 6 y 7 parámetros.

El desempeño de estos modelos fue evaluado utilizando distintos tests y estadísticos.

El primer test realizado en ambos modelos geoidales, fue el enfoque empírico clásico del cual obtuvimos un RMS para cada función paramétrica.

Los valores de RMS, tanto para el modelo geoidal EGM2008 como para el GEOUR06, se encuentran en un entorno de 3 – 4 cm.

Se resalta el hecho de que estos valores de RMS, resultantes de la aplicación y ajuste de los distintos modelos, son considerablemente menores que los RMS calculados previo al ajuste, con valores de 32cm y 20cm para el EGM2008 y GEOUR06, respectivamente.

En el valor del RMS resultante del enfoque empírico Clásico, notamos que dentro de la familia de las transformaciones de similitud diferencial, existe una tendencia a que al aumentar el número de parámetros disminuya dicho valor; mientras que en las funciones trigonométricas clásicas, el valor del RMS no tuvo variaciones al aumentar el número de parámetros.

Luego se realizó el test de Validación Cruzada, el cual arrojó valores de RMS que mostraron un comportamiento similar al test anterior.

El RMS resultante del enfoque empírico clásico indica la precisión de las observaciones, mientras que el RMS resultante de la validación cruzada indica la exactitud de las funciones paramétricas en la predicción de nuevos puntos.

Luego, se calcularon los coeficientes de Determinación R^2 y Determinación Ajustado \bar{R}^2 para evaluar la bondad del ajuste.

Una vez aplicados todos los tests y contrastados los resultados, procedimos a la elección del modelo paramétrico óptimo.

Para el modelo geoidal EGM2008 la mejor solución fue la función de transformación de similitud diferencial de 7 parámetros

$$\Delta N = 3785.37 (\cos \varphi \cdot \cos \lambda) + 11679.02 (\cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda) + 4011.06 \text{sen} \varphi + 6682.13 \left(\frac{\text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda}{W} \right) + 15814.82 \left(\frac{\text{sen} \varphi \cdot \cos \varphi \cdot \cos \lambda}{W} \right) + (-0.00107)(a \cdot W + h) + 16857.23 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi}{W} \right)$$

y para el GEOUR06 la función trigonométrica clásica de 5 parámetros.

$$\Delta N = 15719.13 + (-7317.53)(\cos \varphi \cdot \cos \lambda) + 11107.50 (\cos \varphi \cdot \text{sen} \lambda) + 7445.86 \text{sen} \varphi + (-1681.75) \text{sen}^2 \varphi$$

Resultando, que a partir de estas ecuaciones, se pueden determinar cotas oficiales para nuevos puntos con una precisión de 3 cm.

6. BIBLIOGRAFÍA

- **RODRIGUEZ, R. – BRUNINI, C.** “SIRGAS – Sistema de Referencia Geocéntrico para América del Sur”.
- **BLANCO, D. – FAURE, J. – PEREZ, R. – BARBATO, F. – CHIRICO, C.** “Marco de Referencia Geodésico MRGMVD del Departamento de Montevideo”. Universidad de la República, Facultad de Ingeniería – Intendencia Municipal de Montevideo. Uruguay - 2004.
- **SUBIZA, W.** “Análisis del ajuste 1998 de la Red Geodésica Uruguaya”. Universidad de Panamá.
- **PALVIS, N. - HOLMES, S. - KENYON S. - FACTOR, J.** “An Earth Gravitational Model to Degree 2160: EGM 2008”. National Geospatial – Intelligence Agency. Austria-2008
- **SERVICIO GEOGRAFICO MILITAR.** “Cálculo de un nuevo modelo geoidal para Uruguay (UruGeoide - 2007)”. Uruguay - 2007.
- **BENAVIDEZ SOSA, A.** “Fundamentos de Geodesia Física”. Uruguay - 2004.
- **BENAVIDEZ SOSA, A.** “GEOUR06 – Modelo Geoidal Gravimétrico para Uruguay”. Uruguay - 2006
- **PEREZ RODINO, R.** “Precisiones de posicionamiento con receptores GPS en modo diferencial, y tiempos mínimos de ocupación, para la resolución de ambigüedades en la medición de vectores”. Universidad de la República- Facultad de Ingeniería. Uruguay.
- **FAURE, J.** “Nivelación GPS sobre la Red CDM de Montevideo- Refinamiento del estudio del comportamiento del modelo geoidal EGM96 en el Departamento de Montevideo”. Universidad de la República- Facultad de Ingeniería. Uruguay - 2004..
- **EROL, B.** “Modelling local GPS/levelling geoid with the assesstment of inverse distance weighting and geoestatical kriging methods”. Turquía.
- **DANILA, U.** “Corrective Surface for GPS-levelling in Moldova”. Suecia-2006
- **FOTOPOULOS,G – KOTSAKIS, C – SIDERIS, M.G.** “Determination of the Achievable Accuracy of Relative GPS/Geoid Levelling in Northern Canada”. Universidad de Calgary. Canadá – 2001.
- **FOTOPOULOS,G.** “An analysis on the optimal combination of geoid, orthometric and ellipsoidal height data”. Universidad de Calgary. Canadá – 2003.

- **FOTOPOULOS, G.** “Fitting the gravimetric geoid to GPS on Benchmarks”. Universidad de Toronto. Canadá – 2009.
- **RAIZNER, C.** “A regional analysis of GNSS – levelling”. Universidad de Stuttgart. Alemania - 2008.
- **VELLA, P.** “Use Of Similarity Transformations To Improve GPS Heighting”. Universidad Tecnológica de Malasia. Malasia – 2003.
- **MARTÍNEZ, E.** “Errores frecuentes en la interpretación del coeficiente de determinación lineal”. España.
- **FONTICELLA, R.** “The Usefulness of the R^2 Statistic”.
- **TUSELL, F.** “Análisis de Regresión Introducción teórica y práctica basada en R”. 2009.